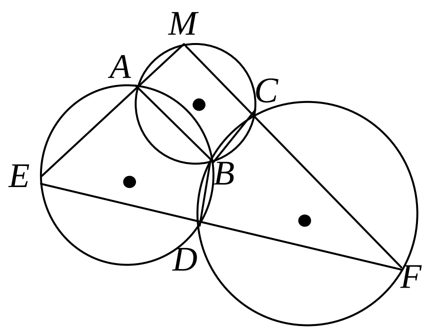
ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា

សម័យប្រឡង: ០១-០៤-២០០៩

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ លើកទី១ ថ្ងៃទី០១-០៤-០៩ (រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ១០០)

១. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យរង្វង់បីដែលកាត់គ្នាពីរៗដូចរូបខាងក្រោម។ សង់រូបឡើងវិញហើយ បង្ហាញថាចំនុច $E;D$ និង F នៅលើបន្ទាត់តែមួយ។



២. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $1^{2009}+2^{2009}+2^{2009}+\dots+(n-1)^{2009}+n^{2009}$ ចែកមិនដាច់នឹង $n+2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n។

៣. (១៥ពិន្ទុ) គេមាន $f(x)=x^2-3x+3$ ។

ក. បង្ហាញថាបើ $f(x)=x$ នោះ $f\left(f(x)\right)=x$ ។

ខ. រកឫសនៃសមីការ $f(x)=x$ ។ ទាញរកឫសនៃសមីការ

$$\left(x^2-3x+3\right)^2-3\left(x^2-3x+3\right)+3=x \text{ ។}$$

៤. (១៥ពិន្ទុ) គេតាង $n!=n(n-1)(n-2)\times\dots\times2\times1$ ។ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់

វិជ្ជមាន n គេបាន:

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\ldots+\frac{(2009)(2010)\ldots(2009+n-1)}{n!}=\frac{(2010)(2011)\ldots(2009+n)}{n!}$$

៥. (១៥ពិន្ទុ) អនុគមន៍ g កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ

$$g(x+1)+g(x-1)=\sqrt{2}g(x) \text{ ។}$$

ក. គេតាង $g(x)=p$ និង $g(x-1)=q$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ គណនា $g(x+1)$, $g(x+2)$, $g(x+3)$ និង $g(x+4)$ ជាអនុគមន៍នៃ p និង q ។

ខ. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍ខួប។

៦. (១៥ពិន្ទុ) គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $u_1=\frac{1}{2}$ និង

$u_n=\left(\frac{2n-3}{2n}\right)u_{n-1}$ ចំពោះ $n=2;3;\ldots$ ។

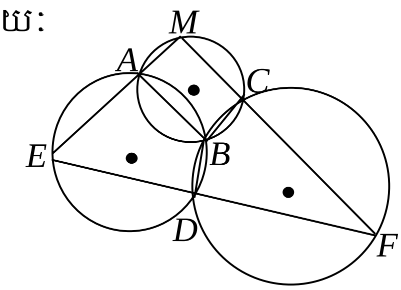
បង្ហាញថា $u_1+u_2+\ldots+u_n<1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

៧. (២០ពិន្ទុ) ត្រីកោណកែង ABC មួយមានអ៊ីប៉ូតេនុស $BC=a$ និងកម្ពស់ $AH=h$ ។ គេចែក $[BC]$ ជា n ចំណែកស្មើគ្នាដែល n ជាចំនួនគត់សេស។ គេយក $[PQ]$ ជាចំណែកដែលនៅកណ្តាលគេ ហើយដែលវង្វាស់មុំ $\widehat{PAQ}=x$ ។

បង្ហាញថា $\tan x=\frac{4nh}{n\left(n^2-1\right)}$ ។

អត្រាកំណែ

១. បង្ហាញថាចំនុច $E;D$ និង F នៅលើបន្ទាត់តែមួយ:



គេមាន: $\widehat{EDB}=\widehat{MAB}$

$\widehat{MAB}=\widehat{BCF}$

គេបាន: $\widehat{EDB}=\widehat{BCF}$

តែ $\widehat{BCF}+\widehat{BDF}=180^0$ នោះ $\widehat{EDB}+\widehat{BDF}=180^0$

ដូចនេះ ចំនុច $E;D$ និង F នៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

២. បង្ហាញថា $1^{2009}+2^{2009}+3^{2009}+\ldots+(n-1)^{2009}+n^{2009}$ ចែកមិនដាច់នឹង $n+2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n:

គេមាន:

$$S_n=1^{2009}+2^{2009}+3^{2009}+\ldots+(n-1)^{2009}+n^{2009}$$

$$2S_n=\left(n^{2009}+2^{2009}\right)+\left((n-1)^{2009}+3^{2009}\right)+\ldots+\left(2^{2009}+n^{2009}\right)+1^{2009}+1^{2009}$$

$$=(n+2)k_1+(n+2)k_2+\ldots+(n+2)k_{n-1}+2$$

$(n+2)k+2$ ដែល $k=k_1+k+2+\ldots+k_{n-1}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

គេទាញបាន $2S_n$ ចែកមិនដាច់នឹង $n+2$

ដូចនេះ $2S_n$ ចែកមិនដាច់នឹង $n+2$

៣. គេមាន $f(x)=x^2-3x+3$

a). បង្ហាញថាបើ $f(x)=x$ នោះ $f\left(f(x)\right)=x$:

បើ $f(x)=x$ នោះ $f\left(f(x)\right)=f(x)$

ដូចនេះ $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ ព្រោះ $f\left(x\right)=x$

b). រកឫសនៃសមីការ $f\left(x\right)=x$:

សមីការ $f(x)=x$ អាចសរសេរជា $x^2-3x+3=0$ ដែលមានឫស $x_1=1; x_2=3$

ទាញរកឫសនៃសមីការ $\left(x^2-3x+3\right)^2-3\left(x^2-3x+3\right)+3=x$:

សមីការ $\left(x^2-3x+3\right)^2-3\left(x^2-3x+3\right)+3=x$ អាចសរសេរជា

$f\left(f\left(x\right)\right)=x$ ដែលជាសមីការផលវិបាកនៃ $f\left(x\right)=x$

គេទាញបាន $x_1=1; x_2=3$ ជាឫសនៃ $\left(x^2-3x+3\right)^2-3\left(x^2-3x+3\right)+3=x$

គឺ $x_1=1; x_2=3$ ជាឫសនៃ $x^4-6x^3+12x^2-10x+3=0$

$\left(x^2-4x+3\right)\left(x-1\right)^2=0$ សមីការមានឫស $x_1=1; x_2=3$

៤. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេបាន:

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+...+\frac{(2009)(2010)...(2009+n-1)}{n!}=\frac{(2010)(2011)...(2009+n)}{n!}$$

+ ចំពោះ $n=1:1+\frac{2009}{1}=\frac{2010}{1}$ ជាសមភាពដែលពិត

+ ឧបមាថាសមភាពពិតដល់ $n=k$ មានន័យថា:

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+...+\frac{(2009)(2010)...(2009+k-1)}{k!}=\frac{(2010)(2011)(2009+k)}{(k+1)!}$$

+ ពិនិត្យចំពោះ $n=k+1$

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+...+\frac{(2009)(2010)...(2009+k-1)}{k!}+$$

$$+\frac{(2009)(2010)...(2009+k)}{(k+1)!}=\frac{(2010)(2011)...(2009+k)}{k!}+\frac{(2009)(2010)...(2009+k)}{(k+1)!}$$

$$=\frac{(2010)(2011)...(2009+k)(k+1)}{(k+1)!}+\frac{(2009)(2010)...(2009+k)}{(k+1)!}$$

$$=\frac{(2010)(2011)...(2009+k)(2009+(k+1))}{(k+1)!}$$ គឺពិតចំពោះ $n=k+1$

៥. a). គណនា $g(x+1)\,;\,g(x+2)\,;\,g(x+3)\,;\,g(x+4)$:

គេមាន: $g(x+1)=\sqrt{2}g(x)-g(x-1)$

ដោយ $g(x-1)=q\,;\,g(x)=p$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នោះគេបាន:

$$g(x+1)=\sqrt{2}p-q$$

$$g(x+2)=\sqrt{2}g(x+1)-g(x)=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}p-q\right)-p=p-\sqrt{2}q$$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

$$g(x+3)=\sqrt{2}g(x+2)-g(x+1)=\sqrt{2}\left(p-\sqrt{2}q\right)-\sqrt{2}p+q=-q$$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

$$g(x+4)=\sqrt{2}g(x+3)-g(x+2)=\sqrt{2}(-q)-p+\sqrt{2}q=-p=-g(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

b). បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍ខួប:

$$g(x+5)=\sqrt{2}g(x+4)-g(x+3)=-\sqrt{2}p+q$$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

$$g(x+6)=\sqrt{2}g(x+5)-g(x+4)=\sqrt{2}\left(-\sqrt{2}p+q\right)-(-p)=\sqrt{2}q-p\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

$$g(x+7)=\sqrt{2}g(x+6)-g(x+5)=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}q-p\right)-\left(-\sqrt{2}p+q\right)=q\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

$$g(x+8)=\sqrt{2}g(x+7)-g(x+6)=\sqrt{2}q-\left(\sqrt{q}-p\right)=p=g(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

ដូចនេះ g ជាអនុគមន៍ខួប។

របៀបទី២ : តាមសំនួរខាងលើ $g(x+4)=-g(x)$ នោះគេអាចសរសេរ:

$$g(x+8)=g\big((x+4)+4\big)$$
$$g(x+8)=-g(x+4)=-\big(-g(x)\big)=g(x)$$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ g ជាអនុគមន៍ខួប ។

៦. បង្ហាញថា $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n<1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

\+ ចំពោះ $k\geq 2$ គេបាន $2ku_k=2ku_{k-1}-3u_{k-1}$ ហើយ $u_{k-1}=2(k-1)u_{k-1}-2u_k$

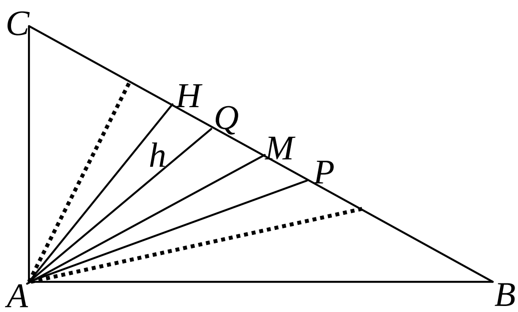
ដោយប្តូរតម្លៃ $k=2;\dots;n+1$

$$u_1=2u_1-4u_2$$
$$u_2=4u_2-6u_3$$
....
$$u_{n-1}=2(n-1)u_{n-1}-2nu_n$$
$$u_n=2nu_n-2(n+1)u_{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}u_i=2u_1-(2n+2)u_{n+1}=1-(2n+2)u_{n+1}$$

ដោយ $u_n>0$ ចំពោះគ្រប់ n នោះ $u_1+u_2+\dots+u_n<1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n.

៧. បង្ហាញថា $\tan x=\dfrac{4nh}{a\left(n^2-1\right)}$:



តាង M ជាចំនុចកណ្តាលនៃ $[BC]$ ។

គេបាន $x=\widehat{PAQ}=\widehat{PAH}-\widehat{QAH}$

$$\tan x=\tan\left(\widehat{PAH}-\widehat{QAH}\right)=\frac{\tan\widehat{PAH}-\tan\widehat{QAH}}{1+\tan\widehat{PAH}\times\tan\widehat{QAH}}$$

តែ $\tan\widehat{PAH}=\dfrac{HP}{HA}$; $\tan\widehat{QAH}=\dfrac{HQ}{HA}$

$$\tan x = \frac{(HP - HQ)\times HA}{HA^2 + HP\times HQ} = \frac{PQ\times HA}{HA^2 + HP\times HQ} \quad (1)$$

ដោយ $HP = HM + MP = HM + \frac{a}{2n}$ និង $HQ = HM - MQ = HM - \frac{a}{2n}$

$$HP\times HQ = HM^2 - \frac{a^2}{4n^2} = \frac{a^2 - 4h^2}{4} - \frac{a^2}{4n^2} = \frac{a^2n^2 - 4n^2h^2 - a^2}{4n^2}$$

$$\tan x = \frac{ah}{3}\times\frac{4n^2}{4n^2h^2 + a^2n^2 - 4n^2h^2 - a^2} = \frac{4nh}{a\left(n^2 - 1\right)}$$