

## វិញ្ញាសាត្រូវប្រើប្រាស់សិស្សពូកែថ្នាក់ទី ៩ (ទី ១)

១). គេឲ្យ  $x, y, z$  ជាបីចំនួនផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$$4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4zx + 2yz - 6y - 10z + 34 = 0 \quad 1$$

ចូរគណនាតំលៃនៃកន្សោម:  $S = (x-4)^{2011} + (y-4)^{2011} + (z-4)^{2011}$

២). ចូរគណនា  $A = 2x^3 + 2x^2 + 1$  ចំពោះ  $x = \frac{1}{3} \left( \sqrt[3]{\frac{23 + \sqrt{513}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{23 - \sqrt{513}}{4}} - 1 \right)$

៣). គេឲ្យ  $c > 1$  និង  $x = \frac{\sqrt{c+2} - \sqrt{c+1}}{\sqrt{c} - \sqrt{c-1}}$ ;  $y = \frac{\sqrt{c+2} - \sqrt{c+1}}{\sqrt{c+1} - \sqrt{c}}$ ;  $z = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{c-1}}{\sqrt{c+2} - \sqrt{c+1}}$

ចូររៀប  $x, y, z$  តាមលំដាប់កើន។

៤). សំរួលកន្សោមខាងក្រោម:

$$P = \frac{1}{2\sqrt{1+1}\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2+2}\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2011\sqrt{2010+2010}\sqrt{2011}}$$

៥). គេឲ្យ  $x$  ជាចំនួនពិត, និងឲ្យ  $A = \frac{-1+3x}{1+x} - \frac{\sqrt{|x|-2} + \sqrt{2-|x|}}{|2-x|}$  ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $A$  ជាចំនួនគត់ និងរកលេខចុងក្រោយរបស់  $A^{2011}$  ។

៦). គេឲ្យត្រីកោណ  $ABC$  ចារឹកក្រៅរង្វង់ផ្ចិត  $O$ , កាំ  $r$  ។ គូសបណ្តាបន្ទាត់ប៉ះរបស់រង្វង់ផ្ចិត  $O$ ,

ស្របនឹងជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណ  $ABC$ , បណ្តាបន្ទាត់ប៉ះនេះបង្កើតជាមួយបណ្តាជ្រុងរបស់

ត្រីកោណ  $ABC$  បានត្រីកោណតូចបីដែលមានក្រឡាផ្ទៃរៀងគ្នាគឺ  $S_1, S_2, S_3$  ។ តាង  $S$  ជាក្រឡាផ្ទៃ

ត្រីកោណ  $ABC$  ។ រកតំលៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម:  $\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S}$  ។

ចំណើយ

១. គណនាតំលៃនៃកន្សោម:  $S = (x-4)^{2011} + (y-4)^{2011} + (z-4)^{2011}$

យើងមាន:  $4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4zx + 2yz - 6y - 10z + 34 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x - y - z)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4, y = 3, z = 5,$$

ដូចនេះ:  $S = (4-4)^{2011} + (4-3)^{2011} + (4-5)^{2011} = 0$

២. គណនា  $A = 2x^3 + 2x^2 + 1$

យើងមាន:  $x = \frac{1}{3} \left( \sqrt[3]{\frac{23 + \sqrt{513}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{23 - \sqrt{513}}{4}} - 1 \right)$

តាង  $a = \sqrt[3]{\frac{23 + \sqrt{513}}{4}}$ ;  $b = \sqrt[3]{\frac{23 - \sqrt{513}}{4}}$ , ទាញបាន  $a^3 + b^3 = \frac{23}{2}$  និង  $ab = 1$

តាង  $y = a + b$  នាំឲ្យ  $y^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = \frac{23}{2} + 3y$

ដោយ  $y = 3x + 1$  នោះពីសមភាពខាងលើយើងបាន  $2x^3 + 2x^2 + 1 = 2$

ដូចនេះ:  $A = 2$

៣. រៀប  $x, y, z$  តាមលំដាប់កើន

យើងមាន: 
$$x = \frac{\sqrt{c+2} - \sqrt{c+1}}{\sqrt{c} - \sqrt{c-1}} = \frac{[(\sqrt{c+2})^2 - (\sqrt{c+1})^2](\sqrt{c} + \sqrt{c-1})}{(\sqrt{c+2} + \sqrt{c+1})[(\sqrt{c})^2 - (\sqrt{c-1})^2]}$$

$$= \frac{\sqrt{c} + \sqrt{c-1}}{\sqrt{c+2} + \sqrt{c+1}},$$

$$y = \frac{\sqrt{c+2} - \sqrt{c+1}}{\sqrt{c+1} - \sqrt{c}} = \frac{[(\sqrt{c+2})^2 - (\sqrt{c+1})^2](\sqrt{c+1} + \sqrt{c})}{(\sqrt{c+2} + \sqrt{c+1})[(\sqrt{c+1})^2 - (\sqrt{c})^2]}$$

**រៀបរៀងដោយ: កែវ សិរី**

$$= \frac{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}}{\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}},$$

$$z = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}} = \frac{[(\sqrt{c})^2-(\sqrt{c-1})^2](\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1})}{(\sqrt{c}+\sqrt{c-1})[(\sqrt{c+2})^2-(\sqrt{c+1})^2]}$$

$$= \frac{\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}},$$

ដោយ  $\sqrt{c}+\sqrt{c-1} < \sqrt{c+1}+\sqrt{c} < \sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}, \forall c > 1$

ដូចនេះ តំរៀបតាមសំណើរប្រធានគឺ:  $x < y < z$  ។

**៤. សំរួលកន្សោម:**

ចំពោះគ្រប់បណ្តាចំនួនគត់  $n$ , យើងមាន:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

ឲ្យតំលៃ  $n$  ពី 1 ទៅដល់ 2010 យើងបានកន្សោម:

$$P = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{2010}} - \frac{1}{\sqrt{2011}}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2011}} = \frac{2011 - \sqrt{2011}}{2011}$$

**៥. + ពី  $|x|-2 \geq 0$  និង  $2-|x| \geq 0$  ទាញបាន  $|x|=2$  នោះ  $x = \pm 2$**

តែពិនិត្យមើលភាគបែង:  $|x-2| \neq 0$  នោះ  $x \neq 2$ , នាំឲ្យ  $x = -2$

ជំនួស  $x = -2$  ចូលកន្សោម  $A$  យើងបាន:  $A = 7$

+ ពេល  $A = 7$  នោះ:  $A^{2003} = 7^{2003} = (7^4)^{500} \cdot 7^3 \equiv 3 \pmod{10}$  មានន័យថាលេខចុងក្រោយ

ដែលត្រូវរកគឺលេខ 3 ។

**រៀបរៀងដោយ: កែវ សិរី**

(បញ្ជាក់: គេអាចធ្វើតាមវិធី លេចឡើងជាលក្ខណៈខួបនៃលេខចុងក្រោយរបស់ចំនួនមួយ

ក៏បាន: វិធីធ្វើដូចខាងក្រោម៖

យើងមាន:  $7^1 = 7$  មានលេខចុងគឺលេខ 7 ,  $7^2 = 49$  មានលេខចុងគឺលេខ 9 ,  $7^3 = 343$

មានលេខចុង គឺលេខ 3,  $7^4 = 2401$  មានលេខចុងគឺលេខ 1, .... ធ្វើដូចនេះរហូតឃើញលក្ខណៈ:

ខួបនៃការលេចឡើងរបស់លេខចុង នៃចំនួន  $7^n$  ដែល  $n$  ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិធំជាង 0 រួចយើង

អាចទាញបានលក្ខណៈទូទៅថា  $7^{4k+3}$  មានលេខចុងគឺលេខ 3 ដែល  $k$  ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិធំជាង 0

ស្មើ 0 ។ ដោយសង្កេតឃើញថា  $A^{2003} = A^{4 \cdot 125 + 3}$  ( $k=125$ ) នោះទាញបានវាមានលេខចុងគឺលេខ 3)

៦. យើងមាន:  $\Delta AMN \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{S_1}{S} = \left(\frac{h_1}{h_a}\right)^2$

ដោយ  $h_1 = h_a - 2r \Rightarrow \frac{S_1}{S} = \left(\frac{h_a - 2r}{h_a}\right)^2 = \left(1 - \frac{2r}{h_a}\right)^2$

តែ  $\frac{ah_a}{2} = rp$  ដែល  $(p = \frac{a+b+c}{2})$

$\Rightarrow 2r = \frac{ah_a}{p} \Rightarrow \frac{S_1}{S} = \left(1 - \frac{a}{p}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S}} = 1 - \frac{a}{p}$  ,

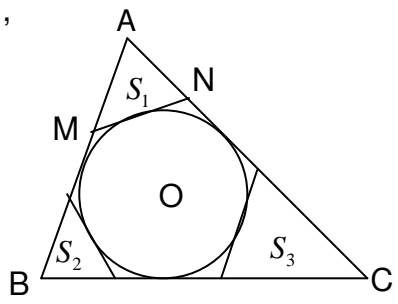
ស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នាដែរ, យើងបាន:

$\sqrt{\frac{S_2}{S}} = 1 - \frac{b}{p}$  និង  $\sqrt{\frac{S_3}{S}} = 1 - \frac{c}{p}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} = 3 - \frac{a+b+c}{p} = 3 - 2 = 1$  ,

$\Rightarrow 1 = \left(\sqrt{\frac{S_1}{S}} \cdot 1 + \sqrt{\frac{S_2}{S}} \cdot 1 + \sqrt{\frac{S_3}{S}} \cdot 1\right)^2 \leq 3\left(\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S}\right)$  ,

$\Rightarrow \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \min\left(\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S}\right) = \frac{1}{3}$  ពេល  $\sqrt{\frac{S_1}{S}} = \sqrt{\frac{S_2}{S}} = \sqrt{\frac{S_3}{S}}$



## រៀបរៀងដោយ: កែវ សិរី

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{a}{p} = 1 - \frac{b}{p} = 1 - \frac{c}{p} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ ជាត្រីកោណសម័ង្ស} \text{ ។}$$

ដូចនេះ តំលៃតូចបំផុតដែលត្រូវរកគឺ  $\frac{1}{3}$  បានពេលត្រីកោណ  $ABC$  ជាត្រីកោណសម័ង្ស។