# បំប៉នសិស្សពូកែថ្នាក់ទី ៩(រយៈពេល ១៥០នាទី)

១). គេឲ្យ $x, y, z$ ជាបីចំនួនផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$$4x^2+2y^2+2z^2-4xy-4zx+2yz-6y-10z+34=0$$ ។

ចូរគណនាតំលៃនៃកន្សោម: $S=(x-4)^{2011}+(y-4)^{2011}+(z-4)^{2011}$

២). ចូរគណនា $A=2x^3+2x^2+1$ ចំពោះ $x=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{23+\sqrt{513}}{4}}+\sqrt[3]{\frac{23-\sqrt{513}}{4}}-1\right)$ ។

៣). គេឲ្យ $c>1$ និង $x=\frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}; y=\frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}}; z=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}$

ចូររៀប $x, y, z$ តាមលំដាប់កើន។

៤). សំរួលកន្សោមខាងក្រោម:

$$P=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{2011\sqrt{2010}+2010\sqrt{2011}}$$

៥). គេឲ្យ $x$ ជាចំនួនពិត, និងឲ្យ $A=\frac{-1+3x}{1+x}-\frac{\sqrt{|x|-2}+\sqrt{2-|x|}}{|2-x|}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A$ ជាចំនួនគត់ និងរកលេខចុងក្រោយរបស់ $A^{2011}$ ។

៦). គេឲ្យត្រីកោណ $ABC$ ចារឹកក្រៅរង្វង់ផ្ចិត $O$,កាំ $r$ ។ គូសបណ្តាបន្ទាត់ប៉ះរបស់រង្វង់ផ្ចិត $O$, ស្របនឹងជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណ $ABC$, បណ្តាបន្ទាត់ប៉ះនេះបង្កើតជាមួយបណ្តាជ្រុងរបស់ត្រីកោណ $ABC$ បានត្រីកោណតូចបីដែលមានក្រឡាផ្ទៃរៀងគ្នាគឺ $S_1, S_2, S_3$ ។ តាង $S$ ជាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $ABC$ ។ រកតំលៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម: $\frac{S_1+S_2+S_3}{S}$ ។

# ចំលើយ

១. គណនាតំលៃនៃកន្សោមៈ $S=(x-4)^{2011}+(y-4)^{2011}+(z-4)^{2011}$

យើងមានៈ $4x^2+2y^2+2z^2-4xy-4zx+2yz-6y-10z+34=0$

$$\Leftrightarrow \quad (2x-y-z)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=4,\ y=3,\ z=5\ ,$$

ដូចនេះ $S=(4-4)^{2011}+(4-3)^{2011}+(4-5)^{2011}=0$

២. គណនា $A=2x^3+2x^2+1$

យើងមានៈ $x=\dfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\dfrac{23+\sqrt{513}}{4}}+\sqrt[3]{\dfrac{23-\sqrt{513}}{4}}-1\right)$

តាង $a=\sqrt[3]{\dfrac{23+\sqrt{513}}{4}};\quad b=\sqrt[3]{\dfrac{23-\sqrt{513}}{4}}$ , ទាញបាន $a^3+b^2=\dfrac{23}{2}$ និង $ab=1$

តាង $y=a+b$ នាំឲ្យ $y^3=a^3+b^3+3ab(a+b)=\dfrac{23}{2}+3y$

ដោយ $y=3x+1$ នោះពីសមភាពខាងលើយើងបាន $2x^3+2x^2+1=2$

ដូចនេះ $A=2$

៣. រៀប $x, y, z$ តាមលំដាប់កើន

យើងមានៈ $x=\dfrac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}=\dfrac{\left[(\sqrt{c+2})^2-(\sqrt{c+1})^2\right](\sqrt{c}+\sqrt{c-1})}{(\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1})\left[(\sqrt{c})^2-(\sqrt{c-1})^2\right]}$

$$=\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}}\ ,$$

$$y=\frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}}=\frac{\left[(\sqrt{c+2})^2-(\sqrt{c+1})^2\right](\sqrt{c+1}+\sqrt{c})}{(\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}\left[(\sqrt{c+1})^2-(\sqrt{c})^2\right]}$$

$$= \frac{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}}{\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}} \ ,$$

$$z = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}} = \frac{\left[(\sqrt{c})^2-(\sqrt{c-1})^2\right](\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1})}{(\sqrt{c}+\sqrt{c-1})\left[(\sqrt{c+2})^2-(\sqrt{c+1})^2\right]}$$

$$= \frac{\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}} \ ,$$

ដោយ $\sqrt{c}+\sqrt{c-1} < \sqrt{c+1}+\sqrt{c} < \sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}, \quad \forall c > 1$

ដូចនេះ តំរៀបតាមសំណើរប្រធានគឺ: $x < y < z$ ។

៤. សំរួលកន្សោម:

ចំពោះគ្រប់បណ្ដាចំនួនគត់ $n$, យើងមាន:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}.(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ ,$$

ឲ្យតំលៃ $n$ ពី $1$ ទៅដល់ $2010$ យើងបានកន្សោម:

$$P = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{2010}}-\frac{1}{\sqrt{2011}}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{\sqrt{2011}} = \frac{2011-\sqrt{2011}}{2011}$$

៥. + ពី $|x|-2 \geq 0$ និង $2-|x| \geq 0$ ទាញបាន $|x| = 2$ នោះ $x = \pm 2$

តែពិនិត្យមើលភាគបែង: $|x-2| \neq 0$ នោះ $x \neq 2$ , នាំឲ្យ $x = -2$

ជំនួស $x = -2$ ចូលកន្សោម $A$ យើងបាន: $A = 7$

+ ពេល $A = 7$ នោះ $A^{2003} = 7^{2003} = (7^4)^{500}.7^3 \equiv 3 (\text{mod } 10)$ មានន័យថាលេខចុងក្រោយ

ដែលត្រូវរកគឺលេខ $3$ ។

(បញ្ជាក់: គេអាចធ្វើតាមវិធី លេចឡើងជាលក្ខណ:ខួបនៃលេខចុងក្រោយរបស់ចំនួនមួយ

ក៏បាន: វិធីធ្វើដូចខាងក្រោម៖

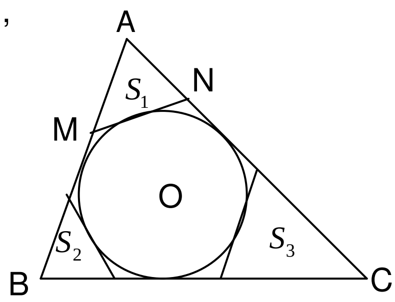
យើងមាន: $7^1=7$ មានលេខចុងគឺលេខ 7 , $7^2=49$ មានលេខចុងគឺលេខ 9 , $7^3=343$ មានលេខចុង គឺលេខ 3, $7^4=2401$ មានលេខចុងគឺលេខ 1, ....ធ្វើដូចនេះរហូតឃើញលក្ខណ:ខួបនៃការលេចឡើងរបស់លេខចុង នៃចំនួន $7^n$ ដែល $n$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិធំជាង 0 រួចយើងអាចទាញបានលក្ខណ:ទូទៅថា $7^{4k+3}$ មានលេខចុងគឺលេខ 3 ដែល $k$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិធំជាងរឺ ស្មើ 0។ ដោយសង្កេតឃើញថា $A^{2003}=A^{4.125+3}\,(k=125)$ នោះទាញបានវាមានលេខចុងគឺលេខ 3)

៦. យើងមាន: $\Delta AMN \sim \Delta ABC \;\Rightarrow\; \frac{S_1}{S}=(\frac{h_1}{h_a})^2$

ដោយ $h_1=h_a-2r \;\Rightarrow\; \frac{S_1}{S}=(\frac{h_a-2r}{h_a})^2=(1-\frac{2r}{h_a})^2$

តែ $\frac{ah_a}{2}=rp$ ដែល $(p=\frac{a+b+c}{2})$

$\Rightarrow\; 2r=\frac{ah_a}{p} \;\Rightarrow\; \frac{S_1}{S}=(1-\frac{a}{p})^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{S_1}{S}}=1-\frac{a}{p}$ ,




ស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នាដែរ, យើងបាន:

$\sqrt{\frac{S_2}{S}}=1-\frac{b}{p}$ និង $\sqrt{\frac{S_3}{S}}=1-\frac{c}{p}$

$\Rightarrow\; \sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}+\sqrt{\frac{S_3}{S}}=3-\frac{a+b+c}{p}=3-2=1$ ,

$\Rightarrow\; 1=(\sqrt{\frac{S_1}{S}}.1+\sqrt{\frac{S_2}{S}}.1+\sqrt{\frac{S_3}{S}}.1)^2\le 3(\frac{S_1}{S}+\frac{S_2}{S}+\frac{S_3}{S})$ ,

$\Rightarrow \quad \frac{S_1+S_2+S_3}{S} \ge \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \min\left(\frac{S_1+S_2+S_3}{S}\right) = \frac{1}{3}$ ពេល $\sqrt{\frac{S_1}{S}} = \sqrt{\frac{S_2}{S}} = \sqrt{\frac{S_3}{S}}$

$\Leftrightarrow \quad 1-\frac{a}{p} = 1-\frac{b}{p} = 1-\frac{c}{p} \quad \Leftrightarrow \quad a=b=c \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ដូចនេះ តំលៃតូចបំផុតដែលត្រូវរកគឺ $\frac{1}{3}$ បានពេលត្រីកោណ $ABC$ ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺