បំប៉នសិស្សពូកែថ្នាក់ទី ៩ (រយៈពេល ១៨០នាទី)

១. a). គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\left(x^3+12x-31\right)^{2012}$ ។

គណនា $f(a)$ បើ $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$ ។

b). រកបណ្តារឹសជាចំនួនគត់របស់សមីការៈ $5\left(x^2+xy+y^2\right)=7(x+2y)$ ។

២. a). ដោះស្រាយសមីការៈ $x^2=\sqrt{x^3-x^3}+\sqrt{x^2-x}$ ។

b). ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការៈ $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2\\ \dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}=4\end{cases}$ ។

៣. a). ដាក់កន្សោមខាងក្រោមជាផលគុណកត្តាៈ

$$P=(2010y-2011z)^3+(2011z-2012x)^3+(2012x-2010y)^3$$ ។

b)គេឲ្យ x, y, z ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz=1$ ។

រកតំលៃធំបំផុតនៃកន្សោមៈ $A=\dfrac{1}{x^3+y^3+1}+\dfrac{1}{y^3+z^3+1}+\dfrac{1}{z^3+x^3+1}$ ។

៤. គេឲ្យរង្វង់ពីរ $(O;R)$ និង $(O';R')$ កាត់គ្នាត្រង់ពីរចំនុចផ្សេងគ្នា A និង B ។ ចេញពីចំនុច C មួយដែលចល័តនៅលើកន្លះបន្ទាត់ AB ។ សង់បណ្តាបន្ទាត់ប៉ះ $CD; CE$ ទៅនឹងរង្វង់ផ្ចិត O ($D; E$ ជាបណ្តាចំនុចប៉ះហើយ E ស្ថិតក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O')។ បន្ទាត់ AD និង AE កាត់រង្វង់ផ្ចិត O' រៀងគ្នាត្រង់ M និង N (M និង N ផ្សេងពីចំនុច A)។ បន្ទាត់ DE កាត់ MN ត្រង់ I ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាៈ

a). $MI.BE = BI.AE$

b). ពេលចំនុច C នោះគេបានលើបន្ទាត់ DE តែងកាត់តាមចំនុចនឹងមួយ។

៥. គេឲ្យត្រីកោណ ABC កែងសមបាតត្រង់ A, មេដ្យាន AD។ ចំនុច M ចល័តនៅលើអង្កត់ AD។ តាង N និង P រៀងគ្នាជាចំណោលកែងរបស់ចំនុច M ទៅលើ AB និង AC។ សង់ $NH \perp PD$ ត្រង់ H។ កំណត់ទីតាំងរបស់ M ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ AHB មានក្រឡាផ្ទៃធំបំផុត។

សំរាយ

១. a). យើងមានៈ $a = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \quad a^3 = 32 + 3\sqrt[3]{\left(16-8\sqrt{5}\right)\left(16+8\sqrt{5}\right)}.\left(\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}\right)$

$\Rightarrow \quad a^3 = 32 + 3.(-4).a \;\Rightarrow\; a^3 = 32 - 12a \;\Rightarrow\; a^3 + 12a - 32 = 0$

រឺយើងអាចសរសេរបានថាៈ $a^3 + 12a - 31 = 1$

យើងបានៈ $f(a) = \left(a^3 + 12a - 31\right)^{2012} = 1^{2012} = 1$

ដូចនេះ $f(a) = 1$ ។

b). យើងមានៈ $5\left(x^2 + xy + y^2\right) = 7\left(x + 2y\right) \qquad (1)$

យើងបានៈ $7\left(x+2y\right) \vdots 5 \;\Rightarrow\; \left(x+2y\right) \vdots 5$

តាង $x + 2y = 5t, \left(t \in \mathbb{Z}\right)$ (2) ជំនួសចូលក្នុង (1)

យើងបានៈ $x^2 + xy + y^2 = 7t$ (3) , ពី (2) $\Rightarrow$ $x = 5t - 2y$ ជំនួសចូល (3)

យើងបានៈ $3y^2-15ty+25t^2-7t=0$ (*) មាន $\Delta=84t-75t^2$

ដើម្បីឲ្យ (*)មានរឹសលុះត្រាតែ $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow 84t-75t^2\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq t\leq\frac{28}{25}$

ដោយ $t\in\mathbb{Z} \Rightarrow t=0$ រឺ $t=1$, ជំនួសចូល (*):

+ ចំពោះ $t=0 \Rightarrow y_1=0 \Rightarrow x_1=0$

+ ចំពោះ $t=1 \Rightarrow \begin{matrix} y_2=3 \Rightarrow x_2=-1 \\ y_3=2 \Rightarrow x_3=1 \end{matrix}$

ដូចនេះ សមីការមានរឹស $(x;y)=\{(0;0),(-1;3),(1;2)\}$ ។

២. a). លក្ខខណ្ឌ $x=0$ រឺ $x\geq 1$

+ ចំពោះ $x=0$ សមីការផ្ទៀងផ្ទាត់

+ ចំពោះ $x\geq 1$យើងបានៈ $\sqrt{x^3-x^2}=\sqrt{x^2(x-1)}\leq\frac{1}{2}\left(x^2+x-1\right)$

$$\sqrt{x^2-x}=\sqrt{1\left(x^2-x\right)}\leq\frac{1}{2}\left(x^2-x+1\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^3-x^2}+\sqrt{x^2-x}\leq x^2$$

សញ្ញាសមភាពកើតមានកាលណាៈ $\begin{cases} x^2=x-1 \\ x^2-x=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=x-1 \\ x^2=x+1 \end{cases} \Rightarrow x+1=x-1$$ មិនសមហេតុផល

ដូចនេះ សមីការដែលឲ្យមានរឹសតែមួយគត់គឺ $x=0$ ។

b). តាង (I) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2 & (1) \\ \dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}=4 & (1) \end{cases}$ លក្ខខណ្ឌៈ $x;y;z\neq 0$

ពី (1) $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{2}{xy}+\dfrac{2}{yz}+\dfrac{2}{zx}=4$, ជំនួសចូល (2) យើងបានៈ

$$\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{xy}+\frac{2}{xz}+\frac{2}{yz}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{zx}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{xz}+\frac{1}{z^2}\right)+\left(\frac{1}{y^2}+\frac{2}{yz}+\frac{1}{z^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=0 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x=y=-z$$

ជំនួសចូលប្រព័ន្ធសមីការ (I) យើងបានប្រព័ន្ធសមីការៈ $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=2 \\ \dfrac{1}{z^2}=4 \end{cases}$

ចំលើយនៃប្រព័ន្ធសមីការដែលឲ្យគឺៈ $(x;\,y;\,z)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ ។

៣. a). តាងៈ $2010y-2011z=a,\ 2011z-2012x=b,\ 2012x-2010y=c$

នាំឲ្យៈ $a+b+c=0$ ហើយយើងក៏បានៈ

$$(2010y-2011z)^3+(2011z-2012x)^3+(2012x-2010y)^3=a^3+b^3+c^3$$

$$=\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right)+3abc$$

$$= (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\right)+3abc$$

$$= 3abc = 3(2010y-2011z)(2011z-2012x)(2012x-2011y)$$ ។

ដូចនេះ $P = 3(2010y-2011z)(2011z-2012x)(2012x-2010y)$ ។

b). យើងមានៈ $(x-y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - xy + y^2 \geq xy$$

តែដោយ $x; y > 0 \quad \Rightarrow \quad x+y > 0$

យើងមានៈ $x^3 + y^3 = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$

$$\Rightarrow \quad x^3 + y^3 \geq (x+y)xy$$

$$\Rightarrow \quad x^3 + y^3 + 1 = x^3 + y^3 + xyz \geq (x+y)xy + xyz$$

$$\Rightarrow \quad x^3 + y^3 + 1 \geq xy(x+y+z) > 0$$

ដូចគ្នាដែរៈ $y^3 + z^3 + 1 \geq yz(x+y+z) > 0$ និង $z^3 + x^3 + 1 \geq zx(x+y+z) > 0$

យើងបានៈ $A \leq \dfrac{1}{xy(x+y+z)} + \dfrac{1}{yz(x+y+z)} + \dfrac{1}{xz(x+y+z)}$

$$\Rightarrow \quad A \leq \frac{x+y+z}{xyz(x+y+z)} \quad \Rightarrow \quad A \leq \frac{1}{xyz} = 1$$

ដូចនេះ តំលៃធំបំផុតរបស់ $A = 1$ ពេល $x = y = z = 1$ ។

៤. a). យើងមានៈ $\widehat{BDE} = \widehat{BAE}$ (មុំស្កាត់ធ្នូរួមនៃរង្វង់ផ្ចិត O)

$\widehat{BAE} = \widehat{BMN}$ (មុំស្កាត់ធ្នូរួមនៃរង្វង់ផ្ចិត O')

$\Rightarrow \quad \widehat{BDE} = \widehat{BMN}$

រី $\quad \widehat{BDI} = \widehat{BMN} \quad \Rightarrow \quad BDMI$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុង

$\Rightarrow \quad \widehat{MDI} = \widehat{MBI}$ (ស្កាត់ធ្នូរួម MI)

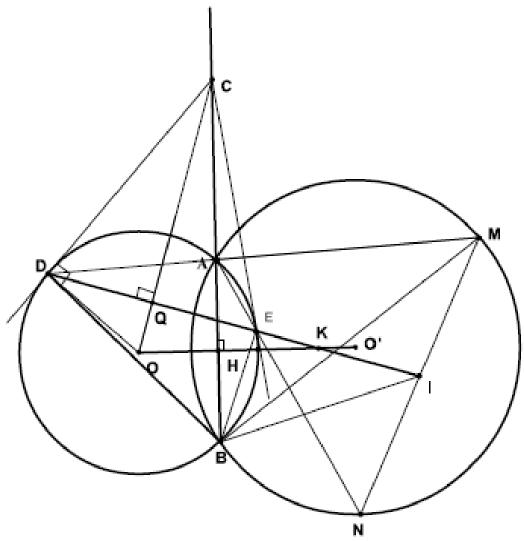
តែ $\quad \widehat{MDI} = \widehat{ABE}$ (ស្កាត់ធ្នូរួម AE នៃរង្វង់ផ្ចិត O)

$\Rightarrow \quad \widehat{ABE} = \widehat{MBI}$

ម្យ៉ាងទៀត $\quad \widehat{BMI} = \widehat{BAE}$ (សំរាយខាងលើ)

$\Rightarrow \quad \Delta MBI \sim \Delta ABE$ (ម.ម)

$\Rightarrow \quad \frac{MI}{AE} = \frac{BI}{BE} \quad \Leftrightarrow \quad MI.BE = BI.AE$



b). តាង Q ជាចំនុចប្រសព្វរបស់ CO នឹង $DE \quad \Rightarrow \quad OC \perp DE$ ត្រង់ Q

$\Rightarrow \quad \Delta OCD$ កែងត្រង់ D មាន DQ ជាកំពស់

$\Rightarrow \quad OQ.OC = OD^2 = R^2 \quad (1)$

តាង K ជាចំនុចប្រសព្វរបស់បន្ទាត់ OO' នឹង DE, H ជាចំនុចប្រសព្វរបស់ AB នឹង

$OO' \Rightarrow OO' \perp AB$ ត្រង់ H

ពិនិត្យ ΔKQO និង ΔCHO មាន $\hat{Q} = \hat{H} = 90^0$; $\hat{O}$ ជាមុំរួម

$$\Rightarrow \quad \Delta KQO \sim \Delta CHO \text{ (ម.ម)}$$

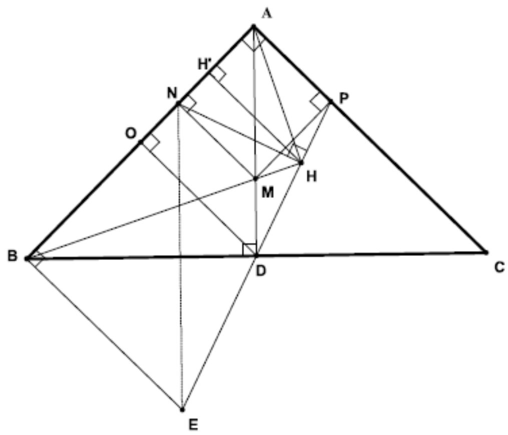
$$\Rightarrow \quad \frac{KO}{CO} = \frac{OQ}{OH} \Rightarrow OC.OQ = KO.OH \quad (2)$$

ពី (1) និង (2) $\Rightarrow KO.OH = R^2 \Rightarrow OK = \dfrac{R^2}{OH}$

ដោយ OH នៅនឹងហើយ R មិនប្រែប្រួលនាំឲ្យ OK មិនប្រែប្រួលទាញបាន K នៅនឹង.

៥. យើងមានៈ ΔABC កែងសមបាតត្រង់ $A \Rightarrow AD$ ជាបន្ទាត់ពុះមុំ A ហើយ

$AD \perp BC \Rightarrow D \in (O; AB/2)$



យើងបាន $ANMP$ ជាការេ (ចតុកោណកែងដែលមាន AM ជាបន្ទាត់ពុះ)

$\Rightarrow$ ចតុកោណ $ANMP$ ចារឹកក្នុងរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត NP

តែ $\widehat{NHP} = 90^0 \Rightarrow H$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត NP

$$\Rightarrow \quad \widehat{AHN} = \widehat{AMN} = 45^0 \quad (1)$$

សង់ $Bx \perp AB$ កាត់បន្ទាត់ PD ត្រង់ E

$\Rightarrow$ ចតុកោណ $BNHE$ ចារឹកក្នុងរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត NE

ម្យ៉ាងទៀត $\Delta BED = \Delta CDP$ (ម.ជ.ម) $\Rightarrow$ $BE = PC$

តែ $PC = BN \Rightarrow BN = BE \Rightarrow \Delta BNE$ កែងសមបាតត្រង់ B

$\Rightarrow$ $\widehat{NEB} = 45^0$ តែ $\widehat{NHB} = \widehat{NEB}$ (ស្កាត់ធ្នូរួម BN)

$$\Rightarrow \quad \widehat{NHB} = 45^0 \quad (2)$$

ពី (1) និង (2) ទាញបាន $\widehat{AHB} = 90^0 \Rightarrow H \in (O; AB/2)$

តាង H' ជាចំណោលកែងរបស់ H ទៅលើ AB

$\Rightarrow S_{AHB} = \dfrac{HH'.AB}{2} \Rightarrow S_{ABH}$ ធំបំផុត $\Leftrightarrow HH'$ ធំបំផុត

តែ $HH' \le OD = AB/2$ (ព្រោះ $H;D$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត AB ដូចគ្នាហើយ $OD \perp AB$)

សញ្ញា "=" កើតមាន $\Leftrightarrow H \equiv D \Leftrightarrow M \equiv D$ ។