បំប៉នសិស្សពូកែថ្នាក់ទី ៩(រយៈពេល ១៥០នាទី)

១. គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរចំនួនពីរៈ $x^2+a_1x+b_1=0 \quad (1), x^2+a_2x+b_2=0 \quad (2)$ មានបណ្តាមេគុណផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $a_1a_2 \geq 2(b_1+b_2)$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថាយ៉ាងតិចមានមួយ ក្នុងចំណោម សមីការទាំងពីរមានរឹស ។

២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \neq \mathbb{Q}$ ។

៣. គេឲ្យបីចំនួនគត់ x, y, z ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2+y^2=z^2$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $xyz \vdots 60$ ។

៤. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall a, b, c>0$ យើងបានៈ $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc$ ។

៥. a). គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានកំពស់ BH មិនខ្លីជាងជ្រុង AC ,កំពស់ CK មិនខ្លីជាងជ្រុង AB ។ គណនាបណ្តាមុំរបស់ ΔABC ។

b).ស្រាយបញ្ជាក់ថាក្នុងត្រីកោណមួយ,ប្រវែងពីអរតូសង់ទៅកំពូលស្មើពីរដងប្រវែងពីចំនុចប្រសព្វរបស់បណ្តាមេដ្យាទ័រទៅនឹងជ្រុងឈមមុខរបស់កំពូលនោះ ។

ចំលើយ

១. ឧបមាថាបណ្តាសមីការ (1) និង (2) សុទ្ធតែគ្មានឫស, នោះយើងបាន:

$$\begin{cases}\Delta_1 = a_1^2 - 4b_1 < 0 \\ \Delta_2 = a_2^2 - 4b_2 < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 < 4b_1 \\ a_2^2 < 4b_2 \end{cases} \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 < 4(b_1 + b_2)$$

$\Rightarrow 4(b_1+b_2) > a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2 \Rightarrow 2(b_1+b_2) > a_1a_2$, ផ្ទុយពីបំរាប់ដែលបានឲ្យ។

ដូចនេះ ទាញបានការឧបមាគឺខុស មានន័យថាបញ្ហាលំហាត់ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

២. ឧបមាថា $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} = r \in \mathbb{Q}$, យើងបាន

$\sqrt{2}+\sqrt{3} = r - \sqrt{5} \Rightarrow 5 + 2\sqrt{6} = r^2 + 5 - 2r\sqrt{5} \Rightarrow 2\sqrt{6} + 2r\sqrt{5} = r^2$,

$\Rightarrow 6 + 5r^2 + 2r\sqrt{30} = \frac{r^4}{4} \Rightarrow \sqrt{30} = \frac{1}{2r}\left(\frac{r^4}{4} - 5r^2 - 6\right) \in \mathbb{Q}$, ករណីនេះមិនសមហេតុផល

ដូចនេះ ទាញបានការឧបមាគឺខុស, នាំឲ្យ $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ ពិត

៣. ឧបមាថា x និង y សុទ្ធតែចែកមិនដាច់នឹង 3។ ទាញបាន $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \,(mod\ 3)$

គឺថា $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2\,(mod\ 3)$ ។ ករណីនេះ មិនសមហេតុផល

ដូចនេះ x និង y សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 3, មានន័យថា $xyz \vdots 3$

ឧបមាថា x, y សុទ្ធតែជាចំនួនសេស , ដូចនោះ $x^2 \equiv y^2 \equiv 1\,(mod\ 4)$

ទាញបាន $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2\,(mod\ 4)$ ។ ករណីនេះ មិនសមហេតុផល ។

ដូចនេះ ក្នុងចំណោម x និង y យ៉ាងតិចមានមួយជាចំនួនគូ

បើ $x \vdots 2, y \vdots 2$ នោះ $xy \vdots 4$, គឺថា $xyz \vdots 4$

ឥឡូវ យើងពិនិត្យករណី x ជាចំនួនគូ, y ជាចំនួនសេស។ ឧបមាថា $x \not\vdots 4$,

ទាញបាន $x^2 \equiv 4\,(mod\ 8)$ ។ ម្យ៉ាងទៀត $y^2 \equiv 1\,(mod\ 8)$,

ទាញបាន $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 5\,(mod\ 8)$ ។ ករណីនេះ មិនសមហេតុផល។

ដូចនេះ $x \vdots 4$, គឺថា $xyz \vdots 4$

ដូចគ្នាដែរ បើ x ជាចំនួនសេស, y ជាចំនួនគូ គឺ $xyz \vdots 4$

ដូចនេះ យើងបានស្រាយបញ្ជាក់ថា $xyz \vdots 4$ ។

ចុងក្រោយ, យើងឧបមាថា x និង y សុទ្ធតែចែកមិនដាច់នឹង 5 ។

ដូចនោះ $x^2 \equiv 1,4\,(mod\ 5),\ y^2 \equiv 1,4\,(mod\ 5)$, ទាញបាន $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2,3,0\ \ (\mathrm{mod}\ 5)$

តែដោយ $z^2 \not\equiv 2,3\,(\mathrm{mod}\ 5)$ នោះ $z^2 \equiv 0\,(mod\ 5)$, គឺថា $z \vdots 5$

មានន័យថា $xyz \vdots 5$

សរុបមក យើងបាន $xyz \vdots 3.4.5 = 60$ ពិត ។

៤. យើងអាចឧបមាបានថា c ជាចំនួនតូចបំផុតក្នុងចំណោមចំនួនទាំងបី a,b,c ។

យើងបាន $3abc - a^2(b+c-a) - b^2(c+a-b) - c^2(a+b-c) =$

$$= a(a^2 - ab - ac + bc) + b(b^2 - bc - ba + ca) + c(c^2 - ca - cb + ab)\ ,$$

$$= a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b)\ ,$$

$$= (a-b)(a^2 - ac - b^2 + bc) + c(c-a)(c-b) = (a-b)^2(a+b-c) + c(a-c)(b-c) \ge 0\,,$$

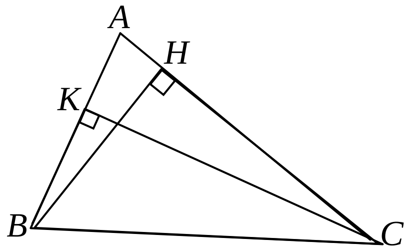
$\Rightarrow\ 3abc \ge a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c)$ ។

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $a = b = c > 0$ ។

៥. a). នៅលើរូបយើងមាន: $AC \le BH, CK \le AC \le BH \le AB \le CK$

$$\Rightarrow CK = AC = BH = AB\ ,$$

ករណីនេះ កើតមានពេល K ត្រូតគ្នានឹង $A; H$ ត្រូតគ្នានឹង A ។



គឺថា ជាពេល ΔABC កែងត្រង់ A ហើយ $AC = AB$

$\Rightarrow$ ΔABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតត្រង់ A ។

ដូចនេះ $\hat{A} = 90^0, \hat{B} = \hat{C} = 45^0$ ។

b). តាង O ជាចំនុចប្រសព្វរបស់មេដ្យាទ័រទាំងបី គឺ O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC ។

តាង H ជាអរតូសង់ $\Delta ABC, M$ ជាចំនុចកណ្តាល BC នោះ : $OM \perp BC$ ។

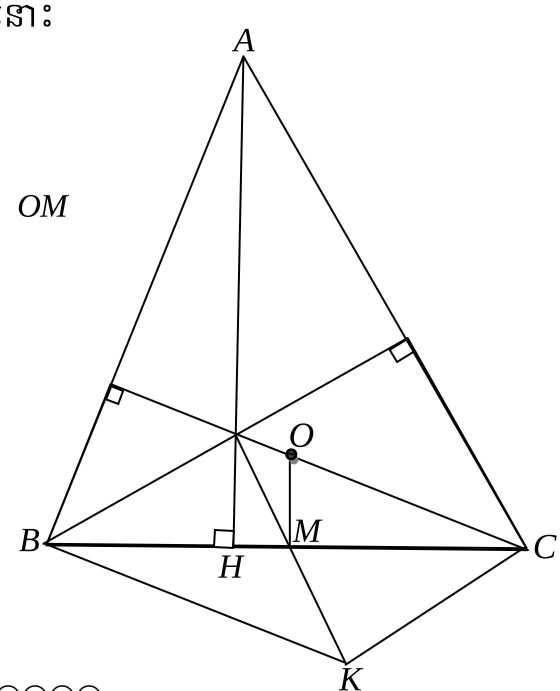
យើងត្រូវការស្រាយបញ្ជាក់ថា: $AH = 2OM$

បន្លាយ AO កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ត្រង់ K $\Rightarrow$ ចតុកោណ $BHCK$ ជាប្រលេឡូក្រាម,នោះអង្កត់ទ្រូងទាំងពីរ BC និង HK កាត់គ្នាត្រង់ចំនុចកណ្តាលរបស់បន្ទាត់នីមួយៗ ហើយ M ជាចំនុចកណ្តាលរបស់ BC នោះ

M ជាចំនុច កណ្តាលរបស់ HK ។

ពិនិត្យ ΔAKH មាន: $OA = OK, MH = MK \Rightarrow OM$ ជាបាតមធ្យម

ទាញបាន $OM = \frac{1}{2}AH \Rightarrow AH = 2OM$ ។



☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺