ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង: ០១-០៤-២០១០

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ លើកទី១២ ថ្ងៃទី១ ថ្ងៃទី ០១-០៤-២០១០

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

១. a). សរសេរ x^4+4y^4 ជាផលគុណនៃពីរពហុធាដឺក្រេទីពីរនៃ x និង y ។

b). បង្ហាញថា n^4+4^n មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n>1$ ។

២. រកអនុគមន៍ g ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $g(x)+g\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដែល $x\neq 0, x\neq 1$ ។

៣. ត្រីកោណកែង XYZ មួយមាន $\hat{X}=90^0, YZ=x, ZX=y$ និង $XY=z$ ។

បង្ហាញថា $x^n>y^n+z^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $n\geq 3$ ។

៤. គេបានបេះផ្លែស្វាយមករៀបគរជា 11 គំនរស្មើៗគ្នាហើយនៅសេសសល់ផ្លែស្វាយចំនួន 6 ផ្លែទៀត។ រកចំនួនផ្លែស្វាយតិចបំផុតដែលគេបានបេះ។

៥. ចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានជ្រុង $AB=a; BC=b; CD=c; DA=d$ រង្វាស់មុំ $\widehat{ABC}=x$ និង $\widehat{ADC}=y$ ។

រកលក្ខខណ្ឌដើម្បីឲ្យចតុកោណ $ABCD$ មានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា។

៦. ស្វីតនៃចំនួន (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1; u_2=1$ និង $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ ចំពោះ $n=3;4;..$

តាង $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ និង $b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ។

a). បង្ហាញថា $u_n > a^{n-2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 3$ ។

b). បង្ហាញថា $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^n - b^n\right)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន n ។

អត្រាកំណែ

១. a). សរសេរ x^4+4y^4 ជាផលគុណពីរកត្តាពហុធាដឺក្រេទីពីរនៃ x និង y:

$$x^4+4y^4=\left(x^4+4x^2y^2+4y^4\right)-4x^2y^2=\left(x^2+2y^2+2xy\right)\left(x^2+2y^2-2xy\right)$$

b). បង្ហាញថា n^4+4^n មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n>1$:

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n>1$ គេមានពីរករណី:

+ បើ $n=2k$ ដែល $k=1,2,...$ គេបាន $n^4+4^n=16\left(k^4+16^{k-1}\right)$ ដែលមិនមែនជាចំនួនបឋមទេ។

+ បើ $n=2k+1$ ដែល $k=1,2,...$ គេបាន $n^4+4^n=n^4+4^{2k+1}=n^4+4\left(2^k\right)^4$

$=\left(n^2+2^{2k+1}+n2^{k+1}\right)\left(n^2+2^{2k+1}-n2^{k+1}\right)$ ដែលមិនមែនជាចំនួនបឋមទេ។

២. រកអនុគមន៍ g ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $g(x)+g\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដែល $x\neq 0, x\neq 1$:

+ ជំនួស x ដោយ $\frac{1}{1-x}$ គេបាន $g\left(\frac{1}{1-x}\right)+g\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-x}$

+ ជំនួស x ដោយ $1-\frac{1}{x}$ គេបាន $g\left(1-\frac{1}{x}\right)+g(x)=1-\frac{1}{x}$

គេបាន $g(x)+g\left(\frac{1}{1-x}\right)=x;\quad -g\left(\frac{1}{1-x}\right)-g\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{1-x};$ និង

$$g\left(1-\frac{1}{x}\right)+g(x)=1-\frac{1}{x}$$

ដោយបូកអង្គ និងអង្គគេបាន: $g(x)=\frac{1}{2}\left(x+1-\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}\right)$ ចំពោះ $x\neq 0, x\neq 1$ ។

៣. ត្រីកោណកែង XYZ មួយមាន $\hat{X}=90^0, YZ=x, ZX=y,$ និង $XY=z$

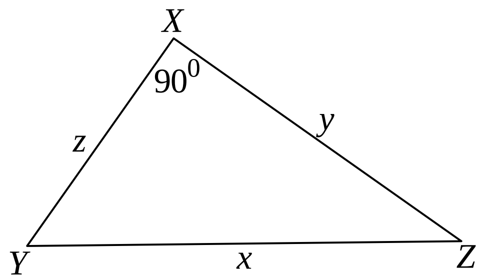
បង្ហាញថា $x^n>y^n+z^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប n ដែល $n\geq 3$

+ ចំពោះ $n=3$

គេមាន: $x^3=y^2+z^2 \Rightarrow x^3=xy^2+xz^2$

តែ $x>y \Rightarrow xy^2>y^3$ ហើយ $x>z \Rightarrow xz^2>z^3$

គេទាញបាន $x^3=xy^2+xz^2>y^3+z^3$



+ ឧបមាថា $x^k>y^k+z^k$ ចំពោះ $k\geq 3$

+ ពិនិត្យចំពោះ $k+1$

$x^k>y^k+z^k \Rightarrow x^{k+1}>xy^k+xz^k$

តែ $x>y \Rightarrow xy^k>y^{k+1}$ ហើយ $x>z \Rightarrow xz^k>z^{k+1}$

គេទាញបាន: $x^{k+1}>xy^k+xz^k>y^{k+1}+z^{k+1}$

៤. រកចំនួនផ្លែស្វាយតិចបំផុតដែលគេបានបេះ :

តាង M ជាចំនួនផ្លែស្វាយតិចបំផុតដែលសោភាបានបេះ ។

+ ដោយដឹងថា គេបានរៀបគរផ្លែស្វាយជា 11គំនរស្មើគ្នានិងនៅសល់ផ្លែស្វាយចំនួន

6 ផ្លែនោះគេបាន: $M\equiv 6\,(\text{mod}\,11) \Rightarrow M=11k+6, k>1$

+ ដោយដឹងថា គេបានរៀបគរផ្លែស្វាយជា 17 គំនរស្មើគ្នា និងគ្មានសល់ផ្លែស្វាយនោះ

គេបាន: $M \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow M = 11k + 6 \equiv 0 \pmod{17}$

$\Rightarrow 11k \equiv -6 \equiv 11 \pmod{17}$

តែ $\gcd(11,17) = 1$ នោះ $k \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow k = 17m + 1, m \geq 1$

ដើម្បីបានចំនួនផ្លែស្វាយតិចបំផុតដែលគេបានបេះ គេគ្រាន់តែយក $m = 1$ ជាការស្រេច

$m = 1 \Rightarrow M = 11.18 + 6 = 204$ ផ្លែ ។

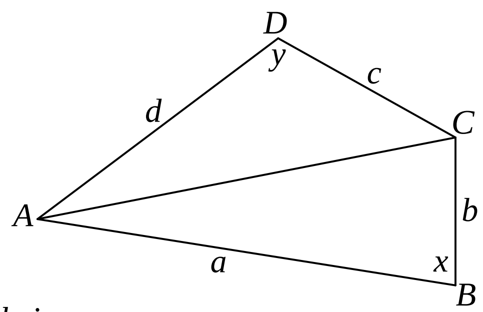
៥. រកលក្ខខណ្ឌដើម្បីឲ្យចតុកោណ $ABCD$ មានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា:

+ រកផ្ទៃក្រឡានៃ $ABCD$ ជាអនុគមន៍នៃ $a; b; c; d; x$ និង y

ចតុកោណ $ABCD$ មានផ្ទៃក្រឡា $S = \frac{1}{2}ab\sin x + \frac{1}{2}cd\sin y$

អង្កត់ទ្រូង $[AC]$ មានប្រវែង $L = a^2 + b^2 - 2ab\cos x = c^2 + d^2 - 2cd\cos y$

ដោយរកដេរីវេធៀបនឹង x គេបាន:



$S'(x) = \frac{1}{2}ab\cos x + \frac{1}{2}cd\cos y.y' \quad (1)$

$L'(x) = 2ab\sin s = 2cd\sin y.y'$

$ab\sin x = cd\sin y.y' \Rightarrow y' = \frac{ab\sin x}{cd\sin y}$

$(1) \Rightarrow S'(x) = \frac{1}{2}ab \times \frac{\sin x\cos y + \cos x\sin y}{\sin y} = \frac{1}{2}ab \times \frac{\sin(x+y)}{\sin y}$ មានសញ្ញាដូច

សញ្ញា $\sin(x+y)$ ។

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x+y) = 0 \Leftrightarrow x + y = \pi$

បើ $0 < x+y < \pi \quad \Leftrightarrow \quad S'(x) > 0$

បើ $2\pi > x+y > \pi \quad \Leftrightarrow \quad S'(x) < 0$

បានន័យថា $S(x)$ មានអតិបរមានលុះត្រាតែ $x+y=\pi$

ដូចនេះ ចតុកោណ $ABCD$ មានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមាលុះត្រាតែ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់១។

៦. តាង $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ និង $b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ។

a). បង្ហាញថា $u_n > a^{n-2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 3$

+ ចំពោះ $n=3$ គេបាន $u_n=2$ ហើយ $a^{3-2}=a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<2$ បានន័យថា $u_3 > a^{3-2}$

+ ឧបមាថា $u_p > a^{p-2}$ ចំពោះ $p \geq 3$

+ សិក្សាចំពោះ $p+1$

តាមសម្មតិកម្មអនុមានរួមគេបាន $u_p > a^{p-2}, u_{p-1} > a^{p-3}$

ដោយបូកអង្គនឹងអង្គគេបាន $u_p + u_{p-1} > a^{p-2}+a^{p-3}$ ហើយ $u_{p+1} > a^{p-2}+a^{p-3}$ (1)

តែគេដឹងថា $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2=x+1$ នោះគេបាន $a^2=a+1$

ដោយគុណនឹង a^{p-3} គេបាន $a^{p-1}=a^{p-2}+a^{p-3} \quad (2)$

តាម $(1)\,\&\,(2) \quad \Rightarrow \quad u_{p+1} > a^{(p+1)-2}$

ដូចនេះ $u_n > a^{n-2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 3$ ។

b). បង្ហាញថា $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(a^n - b^n\right)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន n:

+ ចំពោះ $n=1$ គេបាន $1=u_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(a-b)=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}\right)=1$

+ ឧបមាថា $u_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^k-b^k\right)$

+ សិក្សាចំពោះ $k+1$

គេមាន $u_{k+1}=u_k+u_{k-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(a^k+a^{k-1}\right)-\left(b^k+b^{k-1}\right)\right)$ (3)

តែ $a\&b$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2=x+1$ នោះ $a^2=a+1$ និង $b^2=b+1$

គេបាន $a^{k+1}=a^k+a^{k-1}$ និង $b^{k+1}=b^k+b^{k-1}$

តាម (3) $\Rightarrow$ $u_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^{k+1}-b^{k+1}\right)$

ដូចនេះ $u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^n-b^n\right)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន n ។