ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង: ០១-០៤-២០១០

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ លើកទី២ ថ្ងៃទី ០៣-០៤-២០១០

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

១. (១០ពិន្ទុ) សមីការ $ax^2+2010x+c=x$ គ្មានឫសទេនៅក្នុងសំណុំចំនួនពិត។ បង្ហាញថា សមីការ $a\left(ax^2+2010x+c\right)^2+2010\left(ax^2+2010x+c\right)+c=x$ គ្មានឫសនៅក្នុងសំណុំចំនួនពិតដែរ។

២. (១៥ពិន្ទុ) ពហុធា $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+1$ មានលេខមេគុណ $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$ ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន។ គេដឹងថាពហុធា $P(x)$មាន nឫសដែលសុទ្ធតែជាចំនួនពិត។ បង្ហាញថា $P(2010)\geq\left(2\sqrt{2010}\right)^n$ ។

៣. (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនុចនឹង Aមួយដែលស្ថិតនៅផ្នែកក្នុងនៃមុំស្រួច $\angle xOy$ មួយ។ រកចំនុច Bនិង Cនៅលើជ្រុង $[Ox)$ និង $[Oy)$ រៀងគ្នាដើម្បីឲ្យត្រីកោណ ABCមានបរិមាត្រអប្បបរមា។

៤. (២០ពិន្ទុ) គេមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន r ដែលជាសំណល់ក្នុងវិធីចែកអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b។

a). បង្ហាញថា 2^r-1ជាសំណល់ក្នុងវិធីចែកអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន 2^a-1និង 2^b-1

b). គេតាង μ ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ a និង b ។ បង្ហាញថា $2^{\mu}-1$ ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $2^{a}-1$ និង $2^{b}-1$ ។

៥. (២០ពិន្ទុ) ស្វ៊ែ (S) មួយមានកាំ R ហើយចារឹកក្នុងតេត្រាអែត $ABCD$ មួយ។ ប្លង់បួនផ្សេងគ្នាប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ហើយស្របរៀងគ្នានឹងមុខទាំងបួននៃតេត្រាអែត កាត់តេត្រាអែតនោះបានជាតេត្រាអែតតូចៗចំនួនបួន។ តេត្រាអែតតូចៗទាំងបួននោះចារឹកក្រៅស្វ៊ែតូចៗដែលមានកាំរៀងគ្នា $r_1, r_2, r_3,$ និង r_4 ។

បង្ហាញថា $r_1+r_2+r_3+r_4=2R$ ។

៦. (២០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f មួយកំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទាំងបីខាងក្រោម:

(i) f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $]0;+\infty[$

(ii) $f(x)>-\dfrac{1}{x}$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

(iii) $f(x).f\left(f(x)+\dfrac{1}{x}\right)=1$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

a). គណនា $f(1)$

b). គណនា $f(x)$ ។

អត្រាកំណែ

១. បង្ហាញថាសមីការ $a\left(ax^2+2010x+c\right)^2+2010\left(ax^2+2010x+c\right)+c=x$ គ្មានឫសជាចំនួនពិតដែរ:

តាង $t(x)=ax^2+2010x+c$

ដោយសមីការ $t(x)=x$ គ្មានឫសជាចំនួនពិតនោះ ឬមួយ $t(x)<x$ ឬមួយ $t(x)>x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

គេទាញបាន ឬមួយ $t\left(t(x)\right)<t(x)<x$ ឬមួយ $t\left(t(x)\right)>t(x)>x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ បានន័យថា:

+ ឬមួយ $a\left(ax^2+2010x+c\right)^2+2010\left(ax^2+2010x+c\right)+c<x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x

+ ឬមួយ $a\left(ax^2+2010x+c\right)^2+2010\left(ax^2+2010x+c\right)+c>x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ដូចនេះ សមីការ $a\left(ax^2+2010x+c\right)^2+2010\left(ax^2+2010x+c\right)+c=x$ គ្មានឫសជាចំនួនពិតដែរ។

២. បង្ហាញថា $P(2010)\geq\left(2\sqrt{2010}\right)^n$

ដោយលេខមេគុណ $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាននោះឫស $x_1, x_2, \dots, x_n$ ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន។

តាង $\alpha_i=-x_i, i=1,2,\dots,n$ នោះគេបាន $\alpha_i\geq 0$

ហើយ $P(x)=(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)...(x+\alpha_n)$

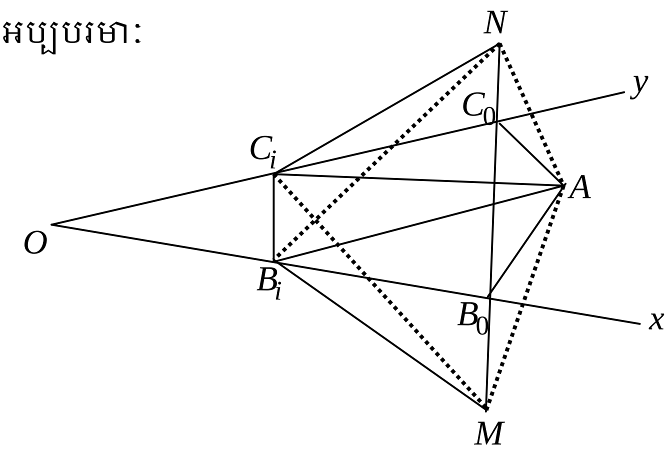
$P(2010)=(2010+\alpha_1)(2010+\alpha_2)...(2010+\alpha_n)$

ម្យ៉ាងទៀត $2010+\alpha_i \geq 2\sqrt{2010.\alpha_i}\,,\, i=1,2,...,n$

គេបាន $P(2010)=(2010+\alpha_1)(2010+\alpha_2)...(2010+\alpha_n)\geq 2^n\sqrt{2010^n.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$

ដូចនេះ $P(2010)\geq\left(2\sqrt{2010}\right)^n$ ព្រោះ $\alpha_1.\alpha_2...\alpha_n=1$

៣. រកចំនុច B និង C នៅលើជ្រុង $[Ox)$ និង $[Oy)$ រៀងគ្នាដើម្បីឲ្យត្រីកោណ ABC មានបរិមាត្រអប្បបរមាៈ



តាង M & N ជាចំនុចឆ្លុះនៃ A ចំពោះ $[Ox)$ និង $[Oy)$ រៀងគ្នា។

តាង B_0 & C_0 ជាចំនុចប្រសព្វរវាង $[MN]$ ជាមួយ $[Ox)$ និង $[Oy)$ រៀងគ្នា។

យក $B_i\in[Ox), C_i\in[Oy), i=1,2,\dots$

+ គេបានបរិមាត្រនៃ ΔAB_0C_0 :

$p_0=AB_0+B_0C_0+C_0A=MB_0+B_0C_0+C_0N=NM$: ថេរ

+ គេបានបរិមាត្រនៃ ΔAB_iC_i : $p_i=AB_i+B_iC_i+C_iA=MB_i+B_iC_i+C_iN$

តែ $MB_i+B_iC_i>MC_i \Rightarrow MB_i+B_iC_i+C_iN>MC_i+C_iN>MN\,,\forall i=\overline{1,n}$

គេបាន $p_i > p_0, \forall i = 1, 2, \ldots$

ដូចនេះ ត្រីកោណ ABC មានបរិមាត្រអប្បបរមាកាលណា $B = B_0, C = C_0$ ។

៤. a) បង្ហាញថា $2^r - 1$ ជាសំណល់ក្នុងវិធីចែកអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន $2^a - 1$ និង $2^b - 1$:

តាមវិធីចែកអឺគ្លីត $a = bq + r, 0 < r < b$ គេបាន:

$$2^a - 1 = 2^{bq+r} - 2^r + 2^r - 1 = 2^r\left(2^b - 1\right)\left(\left(2^b\right)^{q-1} + \ldots + 2^b + 1\right) + \left(2^r - 1\right)$$

$$= \left(2^b - 1\right)\left(2^{b(q-1)+r} + \ldots + 2^{b+r} + 2^r\right) + \left(2^r - 1\right), 0 < 2^r - 1 < 2^b - 1$$

ដូចនេះ $2^r - 1$ ជាសំណល់ក្នុងវិធីចែកអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន $2^a - 1$ និង $2^b - 1$ ។

b). បង្ហាញថា $2^{\mu} - 1$ ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $\left(2^a - 1\right)$ និង $\left(2^b - 1\right)$

តាង $r_0 = a . r_1 = b$ ។ តាមវិធីចែកអឺគ្លីតបន្តបន្ទាប់:

$r_0 = r_1 q_1 + r_2 \ (0 < r_2 < r_1), r_1 = r_2 q_2 + r_3 \ (0 \le r_3 < r_2), \ldots,$ និង

$r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-2} + r_{n-1} \ (0 \le r_{n-1} < r_{n-2}), r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1}$

គេបាន $\gcd(a, b) = r_{n-1} = \mu$

តាង $R_0 = 2^a - 1, R_1 = 2^b - 1$ ។ តាមវិធីចែកអឺគ្លីតបន្តបន្ទាប់និងលទ្ធផលខាងលើ:

$R_0 = R_1 Q_1 + R_2, \ R_2 = 2^{r_2} - 1$

$R_1 = R_2 Q_2 + R_3, R_3 = 2^{r_3} - 1$

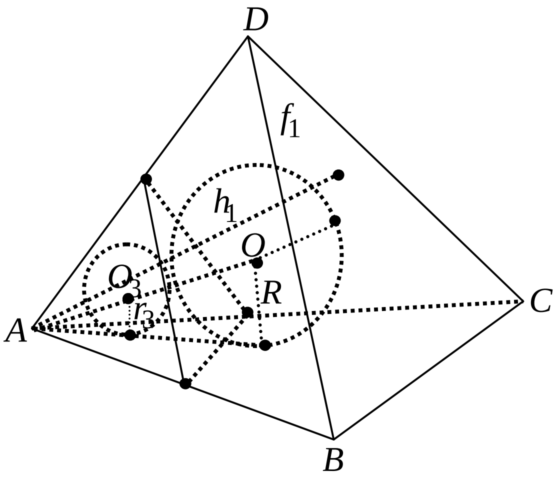
....

$R_{n-3} = R_{n-2} Q_{n-2} + R_{n-1}, R_{n-1} = 2^{r_{n-1}} - 1$

$R_{n-2} = R_{n-1} Q_{n-1}$

គេបាន $\gcd(R_0, R_1) = R_{n-1} = 2^{\mu} - 1$

៥. បង្ហាញថា $r_1+r_2+r_3+r_4=2R$:



តាង $f_i\ \&\ h_i,\ i=1,2,3,4$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃមុខនិងកម្ពស់ដែលត្រូវគ្នានៃតេត្រាអែត។

តាង $r_i,\ i=1,2,3,4$ ជាកាំស្វ៊ែចារឹកក្នុងតេត្រាអែតតូចៗទាំងបួន។

ដោយប្លង់មុខកាត់ស្របមុខនៃតេត្រាអែត នោះតេត្រាអែតតូចៗដែលបានទាំងបួនដូច នឹងតេត្រាអែតដើម។

គេបាន:

$R/r_i=(h_i-2R)/h_i=1-(2R/h_i)\ \Rightarrow\ (2R/h_i)=1-(r_i/R)=(R-r_i)/R$

ហើយ $2R/h_i=(R-r_i)/R\ \Rightarrow\ 1/h_i=(R-r_i)/2R^2,\ i=1,2,3,4$

ចំពោះ $i=1,2,3,4$ គេបាន:

$$1/h_1+1/h_2+1/h_3+1/h_4=(4R-r_1-r_2-r_3-r_4)/2R^2 \quad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀតគេមានមាឌនៃតេត្រាអែត:

$$V=(1/3)R(f_1+f_2+f_3+f_4)\ \Rightarrow\ f_1+f_2+f_3+f_4=3V/R$$

$$V=(1/3)f_1h_1=(1/3)f_2h_2=(1/3)f_3h_3=(1/3)f_4h_4$$

$$1/h_1=f_1/3V,\ 1/h_2=f_2/3V,\ 1/h_3=f_3/3V,\ 1/h_4=f_4/3V$$

គេបាន

$1/h_1+1/h_2+1/h_3+1/h_4=(f_1+f_2+f_3+f_4)/3V=(3V/R):3V=1/R$ (2)

តាម $(1)\&(2) \Rightarrow (4R-r_1-r_2-r_3-r_4)/2R^2=1/R$

ហើយ $4R-r_1-r_2-r_3-r_4=2R$

ដូចនេះ $r_1+r_2+r_3+r_4=2R$ ។

៦. a) គណនា $f(1)$:

តាង $t=f(1)$

+ យក $x=1 \Rightarrow f(1).f\left(f(1)+1\right)=1$ ហើយ $t.f(t+1)=1 \Rightarrow f(t+1)=1/t$

+ យក $x=t+1 \Rightarrow f(t+1)f\left(f(t+1)+1/(t+1)\right)=1$

ហើយ $(1/t)f\left((1/t)+1/(t+1)\right)=1$

គេបាន $f\left((1/t)+(1/(t+1)\right)=t=f(1)$

ដោយ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $]0;+\infty[$ នោះគេបាន $1/t+1/(t+1)=1$

សមមូលនឹង $t^2-t-1=0$ មានឫស $t=\left(1\pm\sqrt{5}\right)/2$

+ ចំពោះ $t=(1+\sqrt{5})/2$ គេបាន $1<t=f(1)<f(1+t)=1/t<1$ ជាករណីមិនអាចមាន

+ ចំពោះ $t=(1-\sqrt{5})/2$ គេបាន $t=f(1)>-1/1$ គឺពិតចំពោះ (ii)

ដូចនេះ $f(1)=(1-\sqrt{5})/2$

b). គណនា $f(x)$

តាង $\alpha=f(x) \Rightarrow \alpha.f(\alpha+1/x)=1 \Rightarrow f(\alpha+1/x)=1/\alpha$

+ យក $x=\alpha+1/x \Rightarrow f(\alpha+1/x).f\left(f(\alpha+1/x)+1/(\alpha+1/x)\right)=1$

គេទាញបាន $f\left(f\left(\alpha+1/x\right)+x/\left(\alpha x+1\right)\right)=\alpha=f(x)$

ដោយ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $]0;+\infty[$ នោះគេបាន:

$f(\alpha+1/x)+x/(\alpha x+1)=x$

$1/\alpha+x/(\alpha x+1)=x \quad \Leftrightarrow \quad x^2\alpha^2-x\alpha-1=0$

$\alpha=\left(1\pm\sqrt{5}\right)/2x$

+ ចំពោះ $\alpha=(1+\sqrt{5})/2x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=-(1+\sqrt{5})/2x^2<0$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះដែលផ្ទុយពីលក្ខណ: (i)

+ ចំពោះ $\alpha=(1-\sqrt{5})/2x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=-(1-\sqrt{5})/2x^2>0$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណ: (i)

ម្យ៉ាងទៀត $(1-\sqrt{5})/2>-1 \quad \Rightarrow \quad f(x)=(1-\sqrt{5})/2x>-1/x$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

លក្ខណ: (ii) ។

ដោយ $f(x)=t/x$ នោះគេបាន:

$$f(x).f\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)=(t/x)f\left((t/x)+(1/x)\right)=(t/x)(tx/t+1)=t^2/(t+1)=1$$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណ: (iii) ។

ដូចនេះ $f(x)=t/x$ ដែល $t=(1-\sqrt{5})/2$ ។