ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង: ០១ មេសា ២០១១

វិញ្ញាសា: គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ លើកទី១ : ០១-៤-២០១១

រយៈពេល: ១៨០នាទី ពិន្ទុ: ១០០

១. (១០ពិន្ទុ) នៅដើមឆ្នាំ ២០១១នេះ ចំនួនទេសចរដែលបានមកទស្សនាប្រសាទអង្គរវត្ត ស្មើនឹង $pq\left(p^2-q^2\right)$ ដែល p នឹង q ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិហើយ $p>q$។ គេស្រង់ឈ្មោះទេសចរទាំងនោះដាក់ក្នុងបញ្ជីមួយដោយមានចុះលេខរៀងត្រឹមត្រូវ។ បង្ហាញថា លេខរៀងរបស់ទេសចរចុងក្រោយគេបង្អស់ជាពហុគុណនៃ 3។

២. (១០ពិន្ទុ) ចំណុច $M_i(x,y,z)$ មានកូអរដោនេជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$។ បង្ហាញថា មានចំណុច $M_i(x,y,z)$ ច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុងលំហ។

៣. (២០ពិន្ទុ) ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1, u_2=1$ និង $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ ចំពោះ $n\geq 2$ ។ បង្ហាញថា $u_{2011}u_{2012}-u_{2010}u_{2013}=1$ ហើយ $u_{1042012}u_{1042013}-u_{1042011}u_{1042014}=-1$។

៤. (២០ពិន្ទុ) ស្វ៊ីត (I_k) កំណត់ដោយ $I_k=\int_0^{\pi/2}\sin^k x dx$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k ។ អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(k)=(k+1)I_kI_{k+1}$ ។

a). កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង I_k និង I_{k+2} ។

b). ប្រៀបធៀប $f(k)$ និង $f(k+1)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k ។

គណនាតម្លៃ $f(2011)$ ។

៥. (២០ពិន្ទុ) ចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានជ្រុង $AB=a, BC=b, CD=a, DA=d$ និង បរិមាត្រ $2p$ ហើយចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ។

បង្ហាញថា ចតុកោណ $ABCD$ មានផ្ទៃក្រឡា $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ។

៦. (២០ពិន្ទុ) $P_n(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេ n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $P_n(x)=-2xP_{n-1}(x)+P'_{n-1}(x)$ ។

a). បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ e^{-x^2} កំណត់ដោយ $y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$ ។

b). ទាញបញ្ជាក់ថា $P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$ ហើយ

$$P''_n(x)-2xP'_n(x)+2nP_n(x)=0 \text{ ។}$$

អត្រាកំណែ

១. បង្ហាញថា លេខរៀងនៃទេសចរចុងក្រោយគេបង្អស់ជាពហុគុណនៃ 3ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $p, q, p > q$:

គេត្រូវបង្ហាញថា $A = pq\left(p^2 - q^2\right)$ជាពហុគុណនៃ 3ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $p, q, p > q$ ។

គេមាន $A = pq\left(p^2 - q^2\right) = pq(p-q)(p+q)$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ p, q គេអាចមានករណី:

$p = 3a$ រឺ $p = 3a+1$ រឺ $p = 3a+2$ ដែល a ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ

$q = 3b$ រឺ $q = 3b+1$ រឺ $q = 3b+2$ ដែល b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ

គេសិក្សាករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម:

+ បើ $p = 3a \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ 3

+ បើ $p = 3a+1$

. បើ $q = 3b \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ 3

. បើ $q = 3b+1 \Rightarrow p - q = 3(a-b) \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ 3

. បើ $q = 3b+2 \Rightarrow p + q = 3(a+b+1) \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ 3

+ បើ $p = 3a+2$

. បើ $q = 3b \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ 3

. បើ $q = 3b+1 \Rightarrow p + q = 3(a+b+1) \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ 3

. បើ $q = 3b+2 \Rightarrow p - q = 3(a-b) \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ 3

ដូចនេះ លេខរៀងនៃទេសចរចុងក្រោយគេបង្អស់ជាពហុគុណនៃ 3 ។

២. បង្ហាញថាមានចំណុច $M_i(x,y,z)$ ច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុងលំហ:

ដើម្បីបំបាត់ x^3 និង z^3 ពីអង្គទី២ គេអាចយក $z=-x$

នោះគេបាន $2x^2+y^2=y^3 \Leftrightarrow 2x^2=(y-1)y^2$

$$\Leftrightarrow \quad x^2=\frac{y-1}{2}.y^2$$

សមីការផ្ទៀងផ្ទាត់លុះត្រាតែ $\frac{y-1}{2}$ ជាការេប្រាកដគឺថា

$$\frac{y-1}{2}=k^2, k\in\mathbb{Z} \quad\Rightarrow\quad y=2k^2+1$$

គេបាន $2x^2=\left(2k^2+1-1\right)\left(2k^2+1\right)^2$ រឺ $x^2=k^2\left(2k^2+1\right)^2$

ហើយ $x=\pm\left(2k^2+1\right), y=2k^2+1, z=\pm k\left(2k^2+1\right)$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$ ។

ដូចនេះ មានចំណុច $M_i(x,y,z)$ ច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុងលំហ ។

៣. ស៊្វីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1, u_2=1$ និង $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}, n\geq 2$ ។

បង្ហាថា $u_{2011}u_{2012}-u_{2010}u_{2013}=1$ និង $u_{1042012}u_{1042013}-u_{1042011}u_{1042014}=-1$

ដំបូងគេត្រូវបង្ហាញថា $u_{n+1}u_{n+2}-u_nu_{n+3}=(-1)^n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

+ ចំពោះ $n=1$ គេបាន $u_2u_3-u_1u_4=1.2-1.3=(-1)^1$: សមភាពពិត

+ ឧបមាថាសមភាពពិតដល់ $n=p$ គឺថា $u_{p+1}u_{p+2}-u_pu_{p+3}=(-1)^p$

+ សិក្សាចំពោះ $n=p+1$

$$u_{p+1+1}u_{p+1+2}-u_{p+1}u_{p+1+3}=u_{p+2}u_{p+3}-u_{p+1}u_{p+4}$$

$$u_{p+2}u_{p+3}-u_{p+1}u_{p+4}=u_{p+2}\left(u_{p+2}+u_{p+1}\right)-u_{p+1}\left(u_{p+3}+u_{p+2}\right)$$

$$=\left(u_{p+2}\right)^2+u_{p+2}u_{p+1}-u_{p+1}\left(u_{p+2}+u_{p+1}+u_{p+2}\right)=\left(u_{p+2}\right)^2-\left(u_{p+1}\right)^2-\left(u_{p+1}u_{p+2}\right)$$

$$=\left(u_{p+2}-u_{p+1}\right)\left(u_{p+2}+u_{p+1}\right)-\left(u_{p+1}u_{p+2}\right)$$

$$=\left(u_p+u_{p+1}-u_{p+1}\right)\left(u_{p+3}\right)-\left(u_{p+1}u_{p+2}\right)=u_pu_{p+3}-u_{p+1}u_{p+2}$$

$$=(-1)\left(u_{p+1}u_{p+2}-u_pu_{p+3}\right)=(-1)(-1)^p=(-1)^{p+1}$$

បញ្ជាក់ថាសមភាពពិតចំពោះ $n=p+1$ ។

ដូចនេះ $u_{n+1}u_{n+2}-u_nu_{n+3}=(-1)^n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

+ បង្ហាញថា $u_{2011}u_{2012}-u_{2010}u_{2013}=1$

ដោយយក $n=2010$ នោះគេបាន $u_{2011}u_{2012}-u_{2010}u_{2013}=(-1)^{2012}=1$

+ បង្ហាញថា $u_{1042012}u_{1042013}-u_{1042011}u_{1042013}=-1$

ដោយយក $n=1042011$ នោះគេបាន

$$u_{1042012}u_{1042013}-u_{1042011}u_{1042013}=(-1)^{1042011}=-1$$ ។

៤. a). កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង I_k និង I_{k+2}

គេមាន:

$$I_k=\int_0^{\pi/2}\sin^{k-1}\sin x dx=\left[-\cos x\sin^{k-1}x\right]_0^{\pi/2}+(k-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{k-2}x\cos^2 xdx$$

$$i_k=(k-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{k-2}x\left(1-\sin^2 x\right)dx=(k-1)I_{k-2}-(k-1)I_k$$

$$\Rightarrow\quad kI_k=(k-1)I_{k-2}$$

$$\Rightarrow\quad (k+2)I_{k+2}=(k+1)I_{k+2-2}\ \Rightarrow\ (k+2)I_{k+2}=(k+1)I_k$$

b). ប្រៀបធៀប $f(k)$ និង $f(k+1)$

គេមាន: $f(k+1)=(k+1+1)I_{k+1}I_{k+1+1}$

$$f(k+1)=(k+2)I_{k+1}I_{k+2} \quad (1)$$

តែ $(k+2)I_{k+2}=(k+1)I_k \Rightarrow I_{k+2}=\frac{k+1}{k+2}I_k$

តាម (1) គេបាន $f(k+1)=(k+2)I_{k+1}\frac{k+1}{k+2}I_k=(k+1)I_kI_{k+1}$

ដោយ $f(k)=(k+1)I_kI_{k+1}$ ហើយ $f(k+1)=(k+1)I_kI_{k+1}$

នោះគេទាញបាន $f(k+1)=f(k), \forall k\in\mathbb{N}$

គណនាតំលៃ $f(2011)$:

ដោយ $f(k+1)=f(k), \forall k\in\mathbb{N}$ នោះគេអាចសរសេរ:

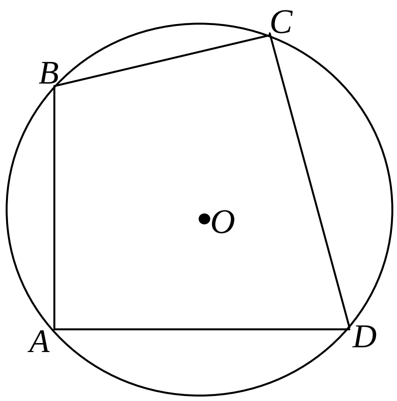
$$f(k)=f(k-1)=f(k-2)=\ldots=f(2)=f(1)=(1+1)I_1I_2=2I_1I_2 \quad (2)$$

តែ $I_1=\int_0^{\pi/2}\sin x dx=[-\cos x]_0^{\pi/2}=1$

$$I_2=\int_0^{\pi/2}\sin^2 x dx=(1/2)\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2x)dx=(1/2)[x-(1/2)\sin 2x]_0^{\pi/2}=\pi/4$$

តាម (2) គេបាន $f(k)=\pi/2 \Rightarrow f(2011)=\pi/2$ ។

៥. បង្ហាញថា ចតុកោណ $ABCD$ មានផ្ទៃក្រឡា $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$



តាមទ្រឹស្តីបទ កូស៊ីនុសក្នុង ΔABC និង ΔACD:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B = c^2 + d^2 - 2cd\cos D$$

ព្រោះ $B + D = \pi \quad \Rightarrow \quad \cos D = -\cos B$

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos B = c^2 + d^2 + 2cd\cos B$$

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

ម្យ៉ាងទៀត

$$S(ABCD) = S(ABC) + S(ACD) = (1/2)ab\sin B + (1/2)cd\sin D$$

$S(ABCD) = (1/2)ab\sin B + (1/2)cd\sin B$ ព្រោះ $B + D = \pi \quad \Rightarrow \quad \sin D = \sin B$

$$S(ABCD) = (1/2)(ab + cd)\sin B$$

$$S(ABCD) = (1/2)(ab + cd)\sqrt{1 - \cos^2 B} \qquad (1)$$

តែគេមាន:

$$1 - \cos^2 B = \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right)\left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right)$$

$$= \left(\frac{2(ab + cd) + a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right)\left(\frac{2(ab + cd) - a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2(ab + cd)}\right)$$

$$= \left(\frac{(a + b)^2 - (c - d)^2}{2(ab + cd)}\right)\left(\frac{(c + d)^2 - (a - b)^2}{2(ab + cd)}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4(ab + cd)^2}\right)(a + b + c - d)(a + b - c + d)(c + d + a - b)(c + d - a + b)$$

$$=\left(\frac{1}{4(ab+cd)^2}\right)(a+b+c+d-2d)(a+b+c+d-2c)\times$$

$$\times(a+b+c+d-2b)(a+b+c+d-2a)$$

ដោយតាង $2p=a+b+c+d$ នោះគេបាន:

ដោយតាង $2p=a+b+c+d$ នោះគេបាន:

$$1-\cos^2 B=\left(\frac{1}{4(ab+cd)^2}\right)(2p-2d)(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a)$$

$$1-\cos^2 B=\left(\frac{4}{(ab+cd)^2}\right)(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

តាម (1) គេបាន:

$$S(ABCD)=\frac{1}{2}(ab+cd)\sqrt{\left(\frac{4}{(ab+cd)^2}\right)(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

ដូចនេះ $S(ABCD)=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ដែល $p=(a+b+c+d)/2$ ។

៦. $P_n(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេ n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $P_n(x)=-2xP_{n-1}+P'_{n-1}$

a). បង្ហាញថា $y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$

+ ចំពោះ $n=1$ គេបាន $y'=(-2x)e^{-x^2}=e^{-x^2}P_1(x)$

+ ឧបមាថាសមភាពពិតដល់ $n=k$ គឺថា $y^{(k)}=e^{-x^2}P_k(x)$ (1)

+ សិក្សាចំពោះ $n=k+1$: ដោយរកដេរីវេអង្គទាំងពីររបស់ (1):

$$y^{(k+1)}=e^{-x^2}\left(-2xP_k(x)+P'_k(x)\right)=e^{-x^2}P_{k+1}(x)$$

b). ទាញបញ្ជាក់ថា: $P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$

ហើយ $P''_n(x)-2xP'_n(x)+2nP_n(x)=0$

គេមាន $y'=(-2x)e^{-x^2}=-2xy \Rightarrow y'+2xy=0 \quad (2)$

ដោយរកដេរីវេអង្គទាំងពីររបស់ (2) ចំនួន n ដងនិងប្រើរូបមន្ត $Leibniz$:

$$(fg)^{(n)}=f^{(n)}g+C(n,1)f^{(n-1)}g'+\ldots+C(n,p)f^{(n-p)}g^{(p)}+\ldots+fg^{(n)}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}C(n,i)f^{(n-i)}g^{(i)}$$

គេបាន $y^{(n+1)}+2(xy)^{(n)}=y^{(n+1)}+2xy^{(n)}+2ny^{(n-1)}=0$

រឺ $e^{-x^2}\left(P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)\right)=0$

$\Rightarrow \quad P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0 \quad (3)$

តែគេមាន: $P_{n+1}(x)=-2xP_n(x)+P'_n(x)$

តាម (3) គេបាន $-2xP_n(x)+P'_n(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$

$P'_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0 \Rightarrow P'_n(x)=-2nP_{n-1}(x)$

$\Rightarrow \quad P'_{n+1}(x)=-2(n+1)P_n(x)=-2nP_n(x)-2P_n(x) \quad (4)$

ដោយ $P_{n+1}(x)=-2xP_n(x)+P'_n(x) \Rightarrow P'_{n+1}(x)=-2xP'_n(x)-2P_n(x)+P''_n(x) \quad (5)$

តាម (4) និង (5) គេបាន: $P''_n(x)-2xP'_n(x)+2nP_n(x)=0$ ។