ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង: ០១ មេសា ២០១១

វិញ្ញាសា: គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ លើកទី២: ០៣-៤-២០១១

១. (១០ពិន្ទុ) គេបានប្រើប្រាស់ទ្រុងចំនួន 99 គ្រឿងសម្រាប់ដឹកជញ្ជូនកូនមាន់ចំនួន $7y38x5$ ក្បាល ទៅកាន់កសិដ្ឋានមួយ។ រកលេខ x និង y ក្នុងប្រព័ន្ធគោលដប់ដោយដឹងថាក្នុងទ្រុងនីមួយៗមានចំនួនកូនមាន់ស្មើៗគ្នា។

២. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប α, β, λ និង μ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $\alpha\mu = 1+\beta\lambda$ គេយក x_0 ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប a និង b ហើយយក y_0 ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $\alpha a+\beta b$ និង $\lambda a+\mu b$។

ចូរប្រៀបធៀបចម្ងាយពីចំនុច $M_0(x_0, y_0)$ ទៅអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មួយ។

៣. (២០ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍ពហុធា $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ដែលមានលេខមេគុណជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប។គេដឹងថាមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប x_0 ដែល $f(x_0) = p$ ជាចំនួនបឋម។ បង្ហាញថា មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប β ច្រើនរាប់មិនអស់ដែល $f(\beta)$ មិនមែន ជាចំនួនបឋម។

៤. (២០ពិន្ទុ) ស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1 = 1, x_2 = 1$ និង $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ ចំពោះ $n \geq 2$។

ស្វ៊ីត (y_n) កំណត់ដោយ $y_n = |x_{n+4}x_{n-2} - x_{n+2}x_n|$ ចំពោះ $n \geq 3$ ។ ស្វ៊ីត (z_n) កំណត់ដោយ $z_n - 9 = 4x_{n-2}x_nx_{n+2}x_{n+4}$ ចំពោះ $n \geq 3$ ។

a). បង្ហាញថា (y_n) ជាស្វ៊ីតថេរចំពោះ $n \geq 3$ ។ ទាញរកតម្លៃនៃតួ $y_{3042011}$ ។

b). បង្ហាញថា តួនីមួយនៃស្វ៊ីត (z_n) ជាការេប្រាកដ។

៥. (២០ពិន្ទុ) គេឲ្យ a និង X ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $a > 1, X > 0$ ។ k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានមិនអវិជ្ជមាន និង c_j ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $0 \leq c_j < a$ ចំពោះ $j = 0, 1, \ldots, k$ ។ បង្ហាញថា X អាចសរសេរបានមួយបែបគត់ជារាង $X = \sum_{j=0}^{k} c_j a^j$ ។

៦. (២០ពិន្ទុ) រង្វង់មួយមានផ្ចិត O និងកាំ R ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC មួយដែលមានបរិមាត្រ $2p$ ។ ត្រីកោណ ABC នេះចារឹកក្រៅរង្វង់មួយទៀតដែលមានផ្ចិត I និងកាំ r ។ បង្ហាញថា $4R + r = p\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)$ ។

អត្រាកំណែ

១. រកលេខ x និង y ដោយដឹងថាក្នុងទ្រុងនីមួយមានចំនួនកូនមាន់ស្មើៗគ្នា:

គេត្រូវរកលេខ x និង y ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោលដប់ដើម្បីឲ្យចំនួន $\overline{7y38x5}$ ចែកដាច់នឹង 99

គេមាន: $\gcd(9,11)=1$

ដើម្បីឲ្យ $\overline{7y38x5}$ ចែកដាច់នឹង $99=9\times 11$ លុះត្រាតែ

$7+y+3+8+x+5\equiv 0 \pmod 9$ និង $5+8+y-x-3-7\equiv 0 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow \quad (x+y\equiv 4 \pmod 9)\wedge(-x+y\equiv -3 \pmod{11})$

$\Leftrightarrow \quad (x+y=9m+4)\wedge(-x+y=11n-3)$

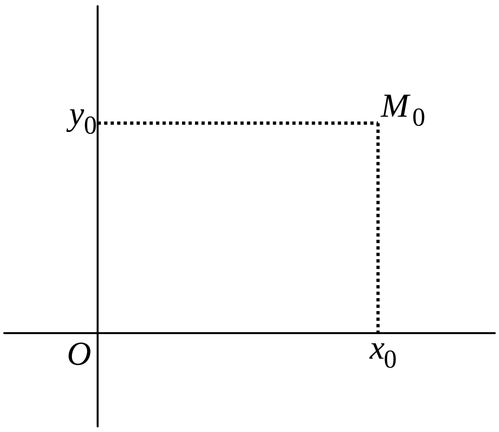
ដោយ $0\le x, y\le 9 \quad \Rightarrow \quad 0\le x+y\le 18, -9\le -x+y\le 9$ នោះគេទាញបាន:

$(x+y=4)\wedge(-x+y=-3), (x+y=4)\wedge(-x+y=8)$

$(x+y=13)\wedge(-x+y=-3), (x+y=13)\wedge(-x+y=8)$

ដូចនេះ $x=8, y=5$ ។

២. ប្រៀបធៀបចម្ងាយពីចំនុច $M_0(x_0, y_0)$ ទៅអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយអរត្តូណរម៉ាល់:



ដោយ x_0 ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $a\&b$ ហើយ y_0 ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ

$A=\alpha a+\beta b\ \&\ B=\lambda a+\mu b$ ដូចនេះ $x_0 \mid y_0 \qquad (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $\quad y_0 \mid A=\alpha a+\beta b \quad\Rightarrow\quad y_0 \mid (\alpha\mu a+\beta\mu b)$

$$y_0 \mid B=\lambda a+\mu b \quad\Rightarrow\quad y_0 \mid (\beta\lambda a+\beta\mu b)$$

គេបាន $\quad y_0 \mid (\alpha\mu-\beta\lambda)a=a$ ព្រោះ $\alpha\mu-\beta\lambda=1$

តាមរបៀបដូចគ្នា: $\quad y_0 \mid A=\alpha a+\beta b \quad\Rightarrow\quad y_0 \mid (\alpha\lambda a+\beta\lambda b)$

$$y_0 \mid B=\lambda a+\mu b \quad\Rightarrow\quad y_0 \mid (\alpha\lambda a+\alpha\mu b)$$

គេបាន $y_0 \mid (\alpha\mu-\beta\lambda)b=b$ ព្រោះ $\alpha\mu-\beta\lambda=1$

ដោយ $(y_0 \mid a \wedge y_0 \mid b) \quad\Rightarrow\quad y_0 \mid x_0 \qquad (2)$

តាម $(1)\&(2) \quad\Rightarrow\quad x_0=y_0$

ដូចនេះ ចំណុច $M_0(x_0,y_0)$ មានចម្ងាយស្មើពីអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយអរតូណរម៉ាល់។

៣. បង្ហាញថាមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប β ច្រើនរាប់មិនអស់ដែល $f(\beta)$ មិនមែនជាចំនួនបឋម:

គេមាន $\quad f(x_0)=a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\ldots+a_1x_0+a_0=p$

គេពិនិត្យ $\quad f(x_0+kp), k\in\mathbb{Z}$

$$f(x_0+kp)=a_n(x_0+kp)^n+a_{n-1}(x_0+kp)^{n-1}+\ldots+a_1(x_0+kp)+a_0$$

$$=\left(a_nx_0^n+a_n\sum_{i=1}^{n}C(n,i)x_0^{n-i}(kp)^i\right)+\left(a_{n-1}x_0^{n-1}+a_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}C(n-1,i)x_0^{n-1-i}(kp)^i\right)+.$$

$$..+(a_1x_0+a_1kp)+a_0$$

$$=\left(a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1}+\ldots+a_1x_0+a_0\right)+\left(a_n\sum_{i=1}^{n}C(n,i)x_0^{n-i}(kp)^i+\ldots+a_1kp\right)$$

$$=p+p\left(a_n\sum_{i=1}^{n}C(n,1)x_0^{n-1}k^ip^{i-1}+a_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}C(n-1,i)x_0^{n-1-i}k^ip^{i-1}+\ldots+a_1k\right)$$

$$f(x_0+kp)=p\left(1+a_n\sum_{i=1}^{n}C(n,1)x_0^{n-i}k^ip^{i-1}+a_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}C(n-1,i)x_0^{n-1-i}k^ip^{i-1}+\ldots+a_1k\right)$$

គេទាញបាន៖ $p\mid f(x_0+kp), k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $\beta=x_0+kp, k\in\mathbb{Z}$ ច្រើនរាប់មិនអស់ដែល $f(\beta)$ មិនមែនជាចំនួនបឋម។

៤. a). បង្ហាញថា (y_n) ជាស្វ៊ីតថេរចំពោះគ្រប់ $n\geq 3$

$y_n=|x_{n+4}x_{n-2}-x_{n+2}x_n|$

$=|(x_{n+3}+x_{n+2})x_{n-2}-x_{n+2}x_n|=|x_{n+3}x_{n-2}+x_{n+2}(x_{n-2}-x_n)|$

$=|x_{n+3}x_{n-2}+x_{n+2}(x_{n-2}-x_{n-1}-x_{n-2})|=|x_{n+3}x_{n-2}-x_{n+2}x_{n-1}|$

$=|x_{n+3}(x_{n-1}-x_{n-3})-x_{n+2}x_{n-1}|=|-x_{n+3}x_{n-3}-x_{n-1}(x_{n+2}-x_{n+3})|$

(ព្រោះ $x_{n-1}=x_{n-2}+x_{n-3} \Rightarrow x_{n-2}=x_{n-1}-x_{n-3}$)

$=|-x_{n+3}x_{n-3}-x_{n-1}(x_{n+2}-x_{n+2}-x_{n+1})|=|x_{n+3}x_{n-3}-x_{n+1}x_{n-1}|$

$y_n=|x_{(n-1)+4}x_{(n-1)-2}-x_{(n-1)+2}x_{(n-1)}|=y_{n-1}, \forall n\geq 3$

ដូចនេះ (y_n) ជាស្វ៊ីតថេរចំពោះគ្រប់ $n\geq 3$ ។

+ ទាញរកតម្លៃ $y_{3042011}$

$y_n = y_{n-1},\ \forall n \geq 3 \quad \Rightarrow \quad y_{3042011} = y_{3042010} = \ldots = y_4 = y_3$

$$= |x_7 x_1 - x_5 x_3| = |13.1 - 5.2| = 3$$

b). បង្ហាញថា តួនីមួយៗនៃស្វ៊ីត (z_n) ជាការេប្រាកដ:

គេមាន: $\quad y_n = y_{n-1} = \ldots = y_{3042011} = 3$ ហើយគេបាន:

$y_n = |x_{n+4}x_{n-2} - x_{n+2}x_n| = 3 \quad \Rightarrow \quad x_{n+4}x_{n-2} - x_{n+2}x_n = \pm 3$

$\Rightarrow \quad x_{n+4}x_{n-2} = x_{n+2}x_n \pm 3$

ម្យ៉ាងទៀត $z_n - 9 = 4x_n x_{n+2}(x_n x_{n+2} \pm 3)$

$\Rightarrow \quad z_n = (\pm 3)^2 + 2(\pm 3)(2x_n x_{n+2}) + (2x_n x_{n+2})^2$

$z_n = (\pm 3 + 2x_n x_{n+2})^2$ ជាការេប្រាកដចំពោះគ្រប់ $n \geq 3$ ។

៥. បង្ហាញថា X អាចសរសេរបានមួយបែបគត់ជារាង: $X = \sum_{j=0}^{k} c_j a^j$

\+ តាមវិធីចែកអឺគ្លីតបន្តបន្ទាប់គេបាន: $X = aq_0 + c_0,\ 0 \leq c_0 < a$

$q_0 = aq_1 + c_1,\ 0 \leq c_1 < a$

$q_1 = aq_2 + c_2,\ 0 \leq c_2 < a$

....

$q_{k-1} = a \times 0 + c_k,\ c \leq c_k < a$

គេបានស្វ៊ីតនៃផលចែក: $\quad X > q_0 > q_1 > q_2 > \ldots > q_{k-1} > q_k = 0$ ហើយគេបាន:

$X = aq_0 + c_0$

$= a(aq_1 + c_1) + c_0 = a^2 q_1 + ac_1 + c_0$

$=a^3q_2+c_2a^2+c_1a+c_0$

....

$=a^kq_{k-1}+c_{k-1}a^{k-1}+\ldots+c_1a+c_0$

$=c_ka^k+c_{k-1}a^{k-1}+\ldots+c_1a+c_0,\left(q_{k-1}=c_k\right)$ ដែល $0\le c_j<a,\ j=0,1,\ldots,k$

ដូចនេះ $X=c_ka^k+c_{k-1}a^{k-1}+\ldots+c_1a+c_0=\sum_{j=0}^{k}c_ja^j$

+ បង្ហាញថា X អាចសរសេរបានមួយបែបគត់

ឧបមាថា X អាចសរសេរបានពីរបែប:

$X=c_ka^k+c_{k-1}a^{k-1}+\ldots+c_a+c_0,0\le c_j<a$

$X=c'_k\,a^k+c'_{k-1}a^{k-1}+\ldots+c'_1a+c'_0,0\le c'_j<a$

គេបាន $(c_k-c'_k)a^k+(c_{k-1}-c'_{k-1})a^{k-1}+\ldots+(c_1-c'_1)a+(c_0-c'_0)=0$

បើ X អាចសរសេរបានពីរបែបនោះគេអាចរកបានចំនួនគត់ j ដែលតូចជាងគេហើយ

$c_j\ne c'_j$ ហើយគេបាន:

$(c_k-c'_k)a^k+(c_{k-1}-c'_{k-1})a^{k-1}+\ldots+(c_{j+1}-c'_{j+1})a^{j+1}+(c_j-c'_j)a^j=0$

$\Rightarrow\quad a^j((c_k-c'_l)a^{k-j}+(c_{k-1}-c'_{k-1})a^{k-1-j}+\ldots+(c_{j+1}-c'_{j+1})a^1+(c_j-c'_j))=0$

$\Rightarrow\quad (c_k-c'_k)a^{k-j}+(c_{k-1}-c'_{k-1})a^{k-1-j}+\ldots+(c_{j+1}-c'_{j+1})a=c'_j-c_j$

$\Rightarrow\quad ((c_k-c'_k)a_{k-j-1}+(c_{k-1}-c'_{k-1})a^{k-1-j-1}+\ldots+(c_{j+1}-c'_{j+1}))a=c'_j-c_j$

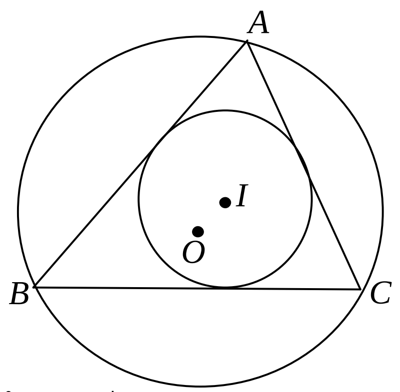
$\Rightarrow\quad a\,|\,(c'_j-c_j)$

តែ $(0\le c_j<a)\wedge(0\le c'_j<a)\quad\Rightarrow\quad(-a<c'_j-c_j<a)$

នេះបញ្ជាក់ថា $a|(c'_j - c_j)$ ជាករណីមិនអាចមាន

ដូចនេះ គេអាចសរសេរ $X = \sum_{j=0}^{k} c_j a^j$ បានតែមួយបែបគត់។

៦. បង្ហាញថា $4R + r = p\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)$



តាមរូបមន្តកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC គេបាន:

$r = (p-a)\tan(A/2) = (p-b)\tan(B/2) = (p-c)\tan(C/2)$

$\Rightarrow \quad r/(p-a) = \tan(A/2), r/(p-b) = \tan(B/2), r/(p-c) = \tan(C/2)$

$\tan(A/2) + \tan(B/2) + \tan(C/2) = r/(p-a) + r/(p-b) + r/(p-c)$

$$= \frac{r\left(3p^2 - 2(a+b+c)p + ab + bc + ca\right)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{r\left(-p^2 + ab + bc + ca\right)}{(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (i)$$

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr$

$\Rightarrow \quad p(p-a)(p-b)(p-c) = p^2r^2$

គេបាន $\quad (p-a)(p-b)\left(p-c = pr^2\right) \quad (ii)$

តាម (i): $\tan(A/2)+\tan(B/2)+\tan(C/2)=\dfrac{r\left(-p^2+ab+bc+ca\right)}{pr^2}$

$$=\frac{-p^2+ab+bc+ca}{pr} \qquad (iii)$$

តាមរូបមន្តផ្សេងទៀតនៃផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC:

$S=(abc)/4R=pr \quad \Rightarrow \quad 4Rpr=4RS=abc$

តាម (ii):

$$abc+(p-a)(p-b)(p-c)=4Rpr+pr^2$$

$$abc+\left(p^3-(a+b+c)\,p^2+(ab+bc+ca)\,p-abc\right)=pr\,(4R+r)$$

$$p\left(p^2-(a+b+c)\,p+ab+bc+ca\right)=pr\,(4R+r)$$

$$p^2-2p^2+ab+bc+ca=r\,(4R+r)$$

$$-p^2+ab+bc+ca=r\,(4R+r)$$

តាម (iii):

$$\tan(A/2)+\tan(B/2)+\tan(C/2)=\frac{r\,(4R+r)}{pr}=\frac{4R+r}{p}$$

$$\Rightarrow \quad p\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)=4R+r$$

ដូចនេះ $4R+r=p\left(\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\right)$ ។